This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.

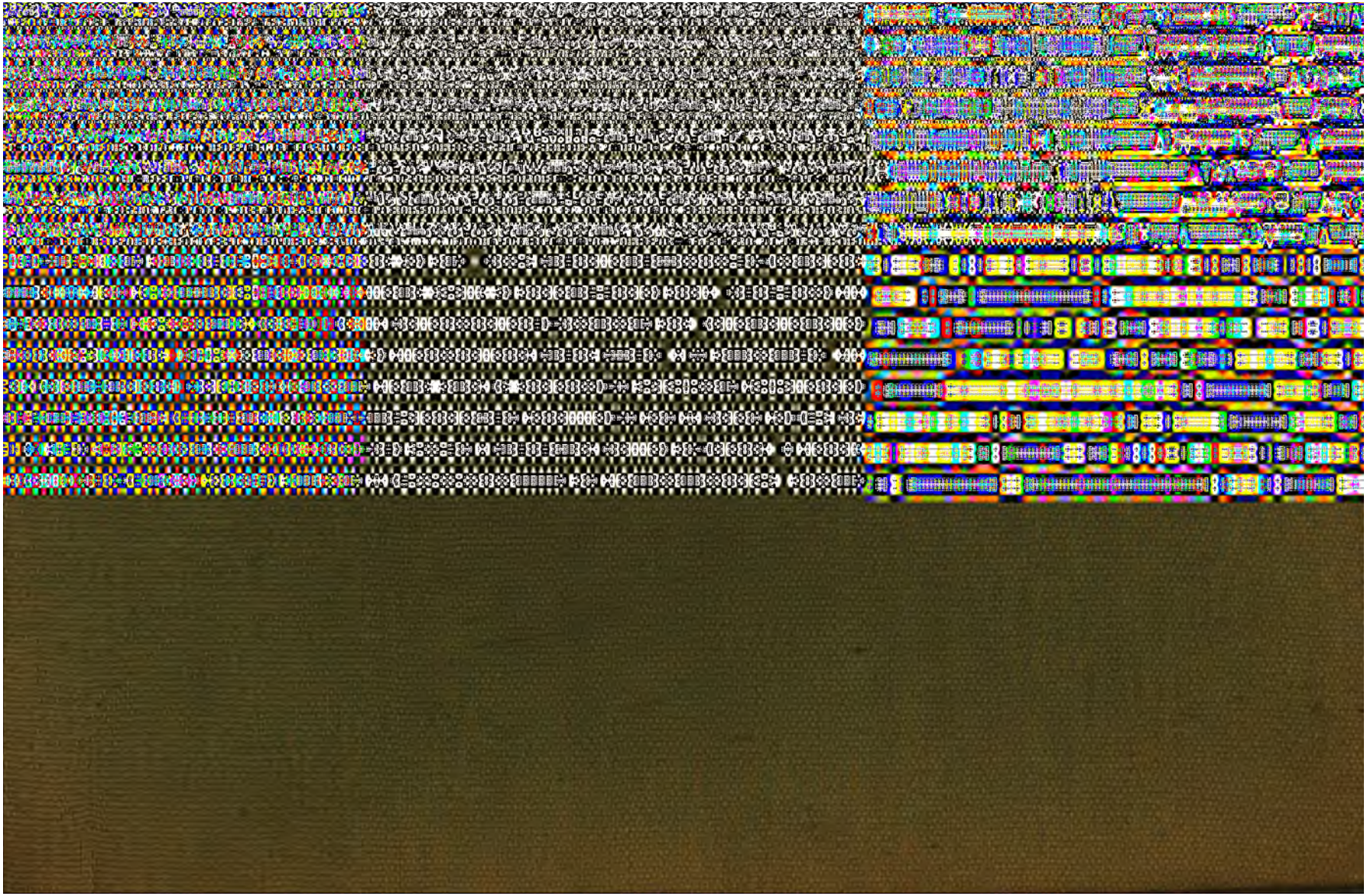
+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.

+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.

+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`



ound
2 1903

Harvard College Library

Bequest of

PUBLIC LIBRARY

WISKUNDIGE OPGAVEN.

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN,

DOOR

LEDEN VAN HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP,

TER SPREUKE VOERENDE:

„Een onvermoeide arbeid komt alles te boven."

NIEUWE REEKS.
ACHTSTE DEEL.
(1899 — 1902.)

AMSTERDAM.
DELSMAN & NOLTHENIUS,
1903.

Sci 900.33

Annals of [illegible]

S. 700.33

HARVARD COLLEGE LIBRARY
OCT 18 1899
CAMBRIDGE, MASS.

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN

DOOR DE

LEDEN VAN HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP

TER SPREUKE VOERENDE

„Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"

ACHTSTE DEEL.
1ste Stuk

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1899.

Ter bevordering eener geregelde toezending van de drukwerken van het Genootschap, worden de leden beleefd verzocht bij verhuizing hun nieuw adres op te geven aan den Heer D. COELINGH, Ondervoorzitter van het Genootschap, Amsterdam, Marnixstraat 409.

De volgende vroeger verschenen uitgaven zijn tegen de daarbij aangegeven prijzen te ontbieden bij den Ondervoorzitter, den Heer D. COELINGH, Amsterdam, Marnixstraat 409, bij wien men ook klachten inbrengen kan over eventueele onregelmatigheden in de toezending der uitgaven van het Genootschap.

Feestgave van het Wiskundig Genootschap ter gelegenheid van zijn honderdjarig bestaan, bevattende de herdruk van twee zeldzame, merkwaardige Hollandsche werken [(Corte onderrichtinghe dienende tot het maecken vande reductien vande tacxcustingen tot gereede penningen, om dien-volgende te eysschen en ontfangen den veertichsten penning op alle vercochte of vervreemde onroerende goeden, volgende tplacaet der Heeren Staten van den XXII Decembris 1598) en (Waerdye van Lyf-renten naer proportie van Los-renten, geteekent JOHAN DE WITT, 1671)]
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1885
in den handel *f* 3,00 . . . . voor de leden *f* 1,50.

Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundige wetenschappen (naar den franschen tekst bewerkt), Amsterdam, 1892
in den handel *f* 2,00 . . . . voor de leden *f* 1,00.

Voordrachten over den Grondslag, per vel
in den handel *f* 0,30 . . . . voor de leden *f* 0,15.

Nieuw Archief voor Wiskunde, eerste reeks, twintig deelen, tweede reeks, deel 1 en 2, per deel
in den handel *f* 4,00 . . . . voor de leden *f* 2,00.
(De volgende deelen per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00,
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,50 . . . . voor de leden *f* 0,75).

Wiskundige Opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, deel 1—6 per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,00 . . . . voor de leden *f* 0,50.

Revue semestrielle des publications mathématiques, deel 1—5, elk van twee stukken à *f* 4,00 en bij overcompleete stukken, per stuk *f* 2,00.

Sec 900.3

HARVARD COLLEGE LIBRARY
OCT 18 1899
CAMBRIDGE, MASS.

Annals of mathemat.

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN.

Vraagstuk I.

L[1] 16*a*. Als P een punt is van de bij driehoek ABC behoorende ellips van STEINER, vraagt men te bewijzen, dat de rechten, door A, B, C evenwijdig met BP, CP, AP of met CP, AP, BP getrokken, door een punt Q gaan, en de meetkundige plaats te bepalen van Q. (Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. H. VAN AUBEL, Dr. A. J. A. PRANGE, Dr. C. STOLP *en* J. A. VOLLGRAFF.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA *en* J. A. VOLLGRAFF.

Men kan den driehoek ABC en de ellips van STEINER beschouwen als de projecties van een gelijkzijdigen driehoek $A_1B_1C_1$ en zijn omschreven cirkel.

Ligt nu P_1 op dien cirkel, b.v. tusschen B_1 en C_1, dan trekken we door A_1 een rechte evenwijdig aan B_1P_1, die den cirkel in Q_1 snijdt, en een rechte evenwijdig aan C_1P_1, die hem in R_1 ontmoet. Dan heeft men boog $P_1C_1Q_1$ = boog $A_1R_1B_1 = 120°$ en boog $P_1B_1R_1$ = boog $A_1Q_1C_1 = 120°$. Dus is verder boog $P_1C_1Q_1$ = boog $B_1P_1C_1$, derhalve boog C_1Q_1 = boog B_1P_1, d. w. z. B_1Q_1 loopt evenwijdig met C_1P_1. Evenzoo vindt men, dat C_1Q_1 evenwijdig is met A_1P_1, B_1R_1 met A_1P_1 en C_1R_1 met B_1P_1.

Gaat men nu terug tot de gegeven figuur, dan volgt hieruit terstond de juistheid van het gestelde. Tevens blijkt, dat de ellips zelf de meetkundige plaats is van Q.

OPMERKING. Het is gemakkelijk in te zien, dat alleen de ellips van STEINER de genoemde eigenschap bezit. Immers, is om driehoek ABC een willekeurige ellips beschreven, en

ligt P op die ellips, in de nabijheid van A, dan bevindt zich het snijpunt Q der rechten, die door A en B evenwijdig aan BP en CP zijn getrokken, zeer dicht bij B. Zal nu ook de rechte uit C evenwijdig met AP getrokken, het punt Q bevatten, dan moet, aan de grens, BC evenwijdig zijn met de raaklijn in A. (J. A. V.)

Oplossing *van* Dr. A. J. A. PRANGE *en* Dr. C. STOLP.

Zijn ξ, η, ζ de barycentrische coördinaten van P, dan heeft men voor de lijnen BP, CP en AP de vergelijkingen

$$-\zeta x + \xi z = 0, \quad \eta x - \xi y = 0, \quad \zeta y - \eta z = 0 \quad \ldots \; 1).$$

Bij deze drie achtereenvolgens

$$\zeta(x+y+z) = 0, \quad \xi(x+y+z) = 0, \quad \eta(x+y+z) = 0$$

optellende, verkrijgt men de vergelijkingen

$$\zeta y + (\zeta + \xi) z = 0, \quad \xi z + (\xi + \eta) x = 0, \quad \eta x + (\eta + \zeta) y = 0 \ldots 2)$$

van de lijnen, die door A, B en C evenwijdig met BP, CP en AP getrokken worden. Zullen deze drie lijnen door één punt Q gaan, dan moet voldaan zijn aan de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} 0 & \zeta & \zeta+\xi \\ \xi+\eta & 0 & \xi \\ \eta & \eta+\zeta & 0 \end{vmatrix} \equiv \xi\eta\zeta + (\zeta+\xi)(\xi+\eta)(\eta+\zeta) \equiv$$

$$\equiv (\xi+\eta+\zeta)(\eta\zeta+\zeta\xi+\xi\eta) = 0;$$

d. w. z. zoo het punt P niet op oneindigen afstand ligt, zal het op de ellips van STEINER moeten gelegen zijn.

Uit de vergelijking

$$\eta\zeta + \zeta\xi + \xi\eta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

volgt nu, dat men $\zeta + \xi$ en $\xi + \eta$ door $-\frac{\zeta\xi}{\eta}$ en $-\frac{\xi\eta}{\zeta}$ mag vervangen; daardoor kan het stelsel 2) eenvoudiger aldus geschreven worden

$$\xi : y = \eta : z = \zeta : x.$$

Uit de laatste vergelijkingen en uit 3) volgt nu onmiddellijk

$$yz + zx + xy = 0,$$

zoodat ook het punt Q op de ellips van STEINER ligt.

Tot hetzelfde besluit komt men met betrekking tot het punt Q′, waarvoor de rechten AQ′, BQ′ en CQ′ evenwijdig zijn met CP, AP en BP.

De punten P, Q en Q′ liggen op drie verschillende ellipsbogen; wanneer P den boog BC beschrijft, zal Q den boog CA en Q′ den boog AB doorloopen.

Vraagstuk II.

A 1 c. Men stelt de volgende sommen van binomiaalcoëfficiënten op:

$$Q_0^m = \binom{s}{m},$$

$$Q_1^m = \binom{s-g_1}{m} + \binom{s-g_2}{m} + \ldots + \binom{s-g_n}{m},$$

$$Q_2^m = \binom{s-g_1-g_2}{m} + \binom{s-g_1-g_3}{m} + \ldots + \binom{s-g_{n-1}-g_n}{m},$$

enz.

$$Q_n^m = \binom{s-g_1-g_2\ldots-g_n}{m},$$

waarin s en g_k willekeurige getallen, m en n geheele getallen zijn.

Te bewijzen, dat

a) $Q_0^m - Q_1^m + Q_2^m \ldots + (-1)^n Q_n^m$ voor $m < n$ de waarde nul heeft, en voor $m = n$ gelijk is aan $g_1 g_2 g_3 \ldots g_n$;

b) $Q_1^m - 2Q_2^m + 3Q_3^m \ldots + (-1)^{n-1} n Q_n^m$ voor $m < n-1$ gelijk aan nul, en voor $m = n-1$ gelijk aan $\Sigma g_1 g_2 g_3 \ldots g_{n-1}$ is.

(K. BES.)

Opgelost *door* K. BES *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Het verschil van twee getallen, die in den driehoek van PASCAL in dezelfde verticale rij staan, kan worden uitgedrukt door een som van getallen, die in de voorgaande rij onder elkander staan; dit blijkt uit de wijze, waarop die getallen door achtereenvolgende optellingen verkregen worden. Men heeft nl.

$$\binom{s}{m} - \binom{s-g_1}{m} = \binom{s-1}{m-1} + \binom{s-2}{m-1} + \ldots + \binom{s-g_1}{m-1}.$$

In het tweede lid staan g_1 termen.

Men zette nu in deze vergelijking $s - g_2$ in plaats van s, en trekke af. Dan komt er

$$\binom{s}{m} - \binom{s-g_1}{m} - \binom{s-g_2}{m} + \binom{s-g_1-g_2}{m} = \left[\binom{s-1}{m-1} - \binom{s-g_2-1}{m-1}\right] +$$

$$+ \left[\binom{s-2}{m-1} - \binom{s-g_2-2}{m-1}\right] + \ldots + \left[\binom{s-g_1}{m-1} - \binom{s-g_1-g_2}{m-1}\right].$$

De verschillen in het tweede lid kunnen weer elk als de som van g_2 coëfficiënten der $(m-2)^e$ orde worden voorgesteld.

In de zoo verkregen vergelijking zette men $s - g_3$ in de plaats van s, trekke af, en herleide op dezelfde wijze. Zoo voortgaande zal men, als er n getallen g zijn ingevoerd, in het eerste lid verkregen hebben: $Q_0^m - Q_1^m + Q_2^m - \ldots + (-1)^n Q_n^m$. Het tweede lid zal een som van binomiaal-coëfficiënten van de orde $(m-n)$ wezen, en het aantal termen is daar het product der getallen g. Wanneer $n > m$ is, dan is elk dier termen 0, en hun som ook; wanneer $m = n$ is, dan zijn al die termen 1, en hun som is $g_1 g_2 \ldots g_n$. Hiermede is het onder a) gestelde bewezen.

Stel

$$Q_0^m - Q_1^m + Q_2^m - \ldots = f(s, g_1, g_2, \ldots g_n).$$

Dan is

$$f(s-g_1, g_2 \ldots g_n) = \binom{s-g_1}{m} - \left[\binom{s-g_1-g_2}{m} + \binom{s-g_1-g_3}{m} + \ldots\right] + \text{enz.}$$

$$f(s-g_2, g_1, g_3 \ldots g_n) = \binom{s-g_2}{m} - \left[\binom{s-g_2-g_1}{m} + \binom{s-g_2-g_3}{m} + \ldots\right] + \text{enz.}$$

enz. enz.

Alles optellende vindt men aan den rechterkant

$$Q_1^m - 2Q_2^m + 3Q_3^m - \ldots$$

Aan den linkerkant heeft men 0 voor $m < n - 1$, en als $m = n - 1$ is, de som der producten van $(n-1)$ der getallen g. Daarmede is het onder b) gestelde bewezen.

In het voorgaande is ondersteld, dat $s > \Sigma g$ is en de getallen g geheele, positieve getallen zijn. Tot de juistheid der uitkomst doet dit niets af, omdat de vormen Q ten opzichte van s en g_k veeltermen zijn.

Vraagstuk III.

L² 15 c. Een omwentelingshyperboloïde te bepalen, welke de gegeven kruisende rechten a en b bevat, en waarvan de as evenwijdig is met een gegeven vlak. (J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. CARDINAAL, J. STEIN *en* DR. C. STOLP.

Oplossing *van* J. STEIN *en* Dr. C. STOLP.

Trek door een punt van a een rechte b' evenwijdig aan b; deel den hoek van a en b', als ook zijn supplement, midden door. Breng door de deellijnen vlakken V en V', loodrecht op het vlak ab'. Elke rechte, die a en b onder gelijke hoeken α kruist, loopt evenwijdig met een der vlakken V en V', dus ook de as der hyperboloïde. De snijlijn van het gegeven vlak met V of met V' is dus evenwijdig aan de as der hyperboloïde.

Breng nu door a en b vlakken evenwijdig aan de gekozen as; deze vlakken zijn raakvlakken aan den keelcirkel der hyperboloïde. Hunne snijlijn c loopt evenwijdig met de as en wordt door a en b onder gelijke hoeken α gesneden.

Trekt men nu uit de snijpunten A en B rechten, die b en a onder een hoek 2α snijden, dan liggen de twee verkregen snijpunten op den keelcirkel. Men behoeft nog slechts in die punten loodlijnen op de overeenkomstige raakvlakken op te richten om het middelpunt der hyperboloïde te verkrijgen.

OPMERKINGEN. I. Bij oplossing van dit vraagstuk langs den analytischen weg kan men de afstandslijn van a en b tot Z-as en het midden van deze lijn als oorsprong nemen. Men late dan de vlakken XOZ en YOZ gelijke hoeken met a en b maken. (T. J. A.)

II. Zooals men weet, is de meetkundige plaats der punten, die op gelijken afstand van de rechten a en b liggen, een hyperbolische paraboloïde. De beschrijvende rechten dezer paraboloïde zijn de assen van alle door a en b gelegde omwentelingshyperboloïden. Men bepaalt de beide oplossingen door een raakvlak evenwijdig aan het gegeven vlak aan te brengen. (J. C.)

Vraagstuk IV.

L³ 17 a. Gegeven zijn twee kwadratische oppervlakken die elkander aanraken. Waar moet men het projectiecentrum C plaatsen, opdat de centrale projectie der snijkromme een dubbelpunt en een tangentiëel punt (dubbelknoop) vertoonen? Hoe moet men C plaatsen, opdat deze twee punten samenvallen? (J. CARDINAAL.)

Oplossing *van* J. CARDINAAL.

We denken ons eerst het projectiecentrum C willekeurig geplaatst. De projectie der bikwadratische snijkromme C^4 is dan een vlakke kromme C_1^4 met drie dubbelpunten; we gaan nu eerst na, onder welke voorwaarde twee dezer punten samenvallen. Bij willekeurigen stand zijn de beide koorden, die uit C naar C^4 kunnen worden getrokken, twee rechten eener hyperboloïde, die het projectievlak in de dubbelpunten A_1 en B_1 snijden. Zal A_1 met B_1 samenvallen, dan moeten de rechten CA_1 en CB_1 zich vereenigen, hetgeen alleen bij een kegelvlak mogelijk is.

Het derde dubbelpunt P_1 is afkomstig van den projectiestraal, die C met het dubbelpunt P van C^4 verbindt.

Het punt C moet dus op een der beide door C^4 gelegde kwadratische kegelvlakken liggen, die P niet tot top hebben.

Wenscht men nu, dat het punt P_1 met de dubbelpunten A_1 en B_1 samenvallen, dan moet men C langs het genoemde kegelvlak verplaatsen, totdat het gekomen is op de beschrijvende rechte van den kegel, waarop P ligt.

Vraagstuk V.

D 2 b β. Men vraagt te bewijzen dat

$$\frac{\pi}{2} \lg (1 + \cos x) = a_0 - \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{5} a_2 - \frac{1}{7} a_3 \ldots \text{ is},$$

wanneer

$$a_0 = 2 \cos x$$

en

$$a_n - a_{n-1} = \frac{2 \cos (2n + 1) x}{2n + 1} + \frac{2 \cos (2n - 1) x}{2n - 1}$$

is. (Dr. W. KAPTEYN).

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

Stelt men

$$a_n = 2\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos p \cos(2n+1)p}{\sin p}\, dp,$$

dan is

$$a_n - a_{n-1} = 2\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)p - \cos(2n+1)p}{\sin p} \cos p\, dp$$

$$= 4\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos p \sin 2np\, dp = 2\int_x^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2n+1)p + \sin(2n-1)p]dp$$

$$= \frac{2\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{2\cos(2n-1)x}{2n-1}.$$

Bovendien is

$$a_0 = 2\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 p}{\sin p}\, dp = 2\cos x.$$

Men heeft dus

$$a - \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} - \ldots = 2\sum_0^\infty \int_x^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \frac{1 - \cos p \cos(2n+1)p}{(2n+1)\sin p}\, dp$$

$$= 2\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{dp}{\sin p} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1 - \cos p \cos(2n+1)p}{2n+1}.$$

Stelt men hierin

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4},$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{\cos(2n+1)p}{2n+1} = \frac{\cos p}{1} - \frac{\cos 3p}{3} + \frac{\cos 5p}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4},$$ [1]

dan wordt

$$a_0 - \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} - \ldots = \frac{\pi}{2}\int_x^{\pi} \frac{1 - \cos p}{\sin p}\, dp = \frac{\pi}{2} \lg(1 + \cos x).$$

[1]) Zie bv. VERDAM, *Summarium der Goniometrie en Trigonometrie*, bl. 60.

Vraagstuk VI.

G 1. De Abelsche integraal

$$\int_{0,\sqrt{3}}^{1,1} \frac{2x-y-\sqrt{3}}{2x+y-\sqrt{3}} \cdot \frac{2x-y+\sqrt{3}}{2x+y+\sqrt{3}} \cdot \frac{ydx}{y^2-1}$$

te bepalen, wanneer $y^3 - 3y + 2x^3 = 0$ is. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN en J. STEIN.

Oplossing *van* J. STEIN.

De kromme $y^3 - 3y + 2x^3 = 0$ is van 't geslacht *een*. Stellen wij $y = tx$, dan verkrijgen wij

$$x^2 = \frac{3t}{t^3+2},\ y^2 = \frac{3t^3}{t^3+2},\ xdx = 3\,\frac{1-t^3}{(t^3+2)^2}\,dt.$$

Voor de bovenste grens,

$$x = 1,\ y = 1,\ \text{is}\ \frac{3t}{t^3+2} = 1,\ \frac{3t^3}{t^3+2} = 1,\ \text{dus}\ t = 1;$$

voor de benedenste grens,

$$x = 0,\ y = \sqrt{3},\ \text{is}\ \frac{3t}{t^3+2} = 0,\ \frac{3t^3}{t^3+2} = 3,\ \text{dus}\ t = \infty.$$

Door de functie onder 't integraalteeken te schrijven in den vorm $\frac{x^2(2-t)^2-3}{x^2(2+t)^2-3} \cdot \frac{t\,.\,xdx}{t^2x^2-1}$, zien wij terstond, dat zij rationaal is in t en dt.

De substitutie geeft nu

$$I = \tfrac{3}{2}\int_{\infty}^{1} \frac{2t^2-2t+1}{2t^2+2t-1} \cdot \frac{t}{t^3+2}\,dt.$$

Door ontbinding in enkelvoudige breuken verkrijgt men

$$I = \tfrac{3}{2}\int_{\infty}^{1} dt\Big[\tfrac{3}{8}(-12+7\sqrt{3})\frac{1}{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}} + \tfrac{3}{8}(-12-7\sqrt{3})\frac{1}{t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{32+24\sqrt[3]{2}+19\sqrt[3]{4}}{18} \cdot \frac{1}{t+\sqrt[3]{2}} +$$

$$+\left(\frac{64-24\sqrt[3]{2}-19\sqrt[3]{4}}{18}\,t - \frac{38+32\sqrt[3]{2}-48\sqrt[3]{4}}{18}\right)\frac{1}{t^2-t\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}\Big].$$

De integratie-weg geeft geen moeilijkheid, daar de functie overal eindig blijft, en in 't oneindige van de orde t^{-2} is. De logarithmische termen vallen dus in het oneindige tegen elkaar weg. Het resultaat wordt

$$I = \tfrac{1}{3}(-12+7\sqrt{3})\log(\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) + \tfrac{1}{3}(-12-7\sqrt{3})\log(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) +$$

$$+\frac{32+24\sqrt[3]{2}+19\sqrt[3]{4}}{12}\log(1+\sqrt[3]{2}) + \frac{64-24\sqrt[3]{2}-19\sqrt[3]{4}}{24}\log(1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}) +$$

$$+\frac{128-120\sqrt[3]{2}+19\sqrt[3]{4}}{12\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{bgtg}\frac{-1+\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\right),$$

waarvoor men schrijven kan

$$I = 4\log 2 + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,.\log\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - \frac{32+24\sqrt[3]{2}+19\sqrt[3]{4}}{24}\log 3 +$$

$$+\frac{24\sqrt[3]{2}+19\sqrt[3]{4}}{24}\log(1+\sqrt[3]{2}) + \frac{128-120\sqrt[3]{2}+19\sqrt[3]{4}}{12\sqrt{3}}\operatorname{bgtg}\frac{\sqrt{3}}{-1+\sqrt[3]{4}}.$$

Vraagstuk VII.

0 4 d. Men vraagt het lijnelement der hyperbolische paraboloïde $xy = az$ in den vorm

$$ds^2 = du^2 + [(u-\alpha)^2 + \beta^2)\,dv^2$$

te schrijven. (Dr. W. KAPTEYN.)

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN *en* Dr. J. DE VRIES.

De rechten van het eene stelsel hebben tot vergelijkingen

$$x = w, \quad wy = az.$$

Kiest men als tweeden parameter den afstand u van een punt van het oppervlak tot de X-as, dan heeft men

$$x = w, \quad y = \frac{au}{\sqrt{a^2+w^2}}, \quad z = \frac{wu}{\sqrt{a^2+w^2}}.$$

Nu wordt

$$ds^2 = du^2 + \left[1 + \frac{a^2u^2}{(a^2+w^2)^2}\right]dw^2.$$

Ten einde den verlangden vorm te verkrijgen, stelt men nog

$$\frac{adw}{a^2+w^2} = dv,$$

of

$$v = \text{bg tg } w;$$

dan wordt

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2 \sec^2 v)\, dv^2.$$

Uit dezen vorm blijkt, dat $u =$ const. de rechthoekige doorsnijdingskrommen der regelschaar $v =$ const. voorstelt.

Vraagstuk VIII.

051. Op het pseudospherische oppervlak, waarvan het lijnelement bepaald wordt door de formule

$$ds^2 = a^2(du^2 + e^{2u} dv^2),$$

wenscht men de geodetische cirkels te bepalen, waarvan de kromming de gegeven waarde $\frac{1}{\rho}$ bezit. (Dr. W. KAPTEYN.)

Oplossing van Dr. W. KAPTEYN.

Wanneer het lijnelement gegeven is in den vorm

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

dan heeft men eerst twee functies M en N te bepalen, die aan de vergelijking

$$\frac{1}{\rho} \sqrt{EG - F^2} = \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}$$

voldoen, verder de differentiaalvergelijking

$$E(N + q)^2 - 2F(N + q)(M + p) + G(M + p)^2 = EG - F^2$$

op te lossen, waarin p en q voorstellen $\frac{\partial \theta}{\partial u}$ en $\frac{\partial \theta}{\partial v}$, en eindelijk de afgeleide dezer oplossing naar de willekeurige constante gelijk te stellen aan eene nieuwe constante (zie DARBOUX, Leçons III, p. 145).

In bovenstaand geval is

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = a^2 e^{2u}; \quad H = a^2 e^u,$$

dus moeten M en N bepaald worden uit

$$\frac{a^2e^u}{\rho} = \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}.$$

We kunnen blijkbaar nemen $M = 0$, $N = \frac{a^2}{\rho} e^u$.

De differentiaalvergelijking wordt dan

$$p^2 + \left(\frac{a^2e^u + \rho q}{\rho e^u}\right)^2 = a^2.$$

Stellen we om hieraan te voldoen

$$\theta = Cv + F(u),$$

dan wordt

$$F'^2(u) + \left(\frac{a^2e^u + \rho C}{\rho e^u}\right)^2 = a^2.$$

Dus is

$$\theta = Cv + \int \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2e^u + \rho C}{\rho e^u}\right)^2}\, du.$$

Hieruit volgt

$$\frac{d\theta}{\partial C} = v - \int \frac{\left(\frac{a^2}{\rho} + Ce^{-u}\right)e^{-u}du}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{\rho} + Ce^{-u}\right)^2}} = C',$$

zoodat de gevraagde krommen worden voorgesteld door de vergelijking

$$v - \frac{1}{C}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{\rho} + Ce^{-u}\right)^2} = C'.$$

Stellen we hierin

$$v = \xi, \quad e^{-u} = \eta, \quad C' = h, \quad \frac{a^2}{\rho C} = -l,$$

dan komt er

$$(\xi - h)^2 + (\eta - l)^2 = l^2\frac{\rho^2}{a^2}.$$

Hieruit wordt de conforme afbeelding der geodetische cirkels op het platte vlak aangewezen.

OPMERKING. Het is te betreuren, dat de benaming „geodetische cirkels" aan twee verschillende stelsels van krommen is toegekend. DARBOUX bedoelt krommen, waarlangs de *geodetische kromming* standvastig is, BIANCHI en STAHL bedoelen krommen, waarvan alle punten gelijken *geodetischen afstand* hebben tot een vast punt. Voor oppervlakken met constante totale kromming geven de beide bepalingen dezelfde krommen. (RED.)

Vraagstuk IX.

H 2 c. Te integreeren de gelijktijdige differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0,$$

$$\frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}} + \frac{dy}{(y-a)\sqrt{Y}} + \frac{dz}{(z-a)\sqrt{Z}} = 0,$$

waar $X = 4x^3 - g_2x - g_3$ is, terwijl Y en Z de uitdrukkingen voorstellen, welke men verkrijgt als men hierin x door y of door z vervangt. (Dr. J. C. KLUYVER.)

Opgelost door Dr. J. C. KLUYVER en J. STEIN.

Oplossing.

Wij beschouwen g_2 en g_3 als de invarianten eener p-functie en stellen

$$x = pu, \quad y = pv, \quad z = pw, \quad a = p\alpha,$$

dus

$$X = p'^2u, \quad Y = p'^2v, \quad Z = p'^2w.$$

De vergelijkingen gaan dan over in:

$$du + dv + dw = 0,$$

$$\frac{du}{pu - p\alpha} + \frac{dv}{pv - p\alpha} + \frac{dw}{pw - p\alpha} = 0.$$

De eerste vergelijking geeft terstond

$$u + v + w + c_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Daar

$$\frac{1}{\wp u - \wp\alpha} = \frac{1}{\wp'\alpha}\left[-\zeta(u+\alpha) + \zeta(u-\alpha) + 2\zeta\alpha\right]$$

is, gaat de tweede vergelijking over in:

$$[\zeta(u+\alpha)-\zeta(u-\alpha)]du+[\zeta(v+\alpha)-\zeta(v-\alpha)]dv+[\zeta(w+\alpha)-\zeta(w-\alpha)]dw=0,$$

aangezien de term $2\zeta\alpha(du+dv+dw)$ wegvalt.

De tweede vergelijking heeft tot integraal

$$\frac{\sigma(u+\alpha)\,\sigma(v+\alpha)\,\sigma(w+\alpha)\,\sigma(c_1+\alpha)}{\sigma(u-\alpha)\,\sigma(v-\alpha)\,\sigma(w-\alpha)\,\sigma(c_1-\alpha)} = -c_2 \quad \ldots \; 2),$$

waarin het eerste lid door toevoeging van den constanten factor $\frac{\sigma(c_1+\alpha)}{\sigma(c_1-\alpha)}$ eene dubbelperiodieke functie van α is geworden; immers $c_1 = -(u+v+w)$.

Vergelijking 1) kan nu vervangen worden door $\phi_3(u, v, w, c_1) = 0$, en vergelijking 2) door $\phi_3(u, v, w, -\alpha) = c_2\phi_3(u, v, w, \alpha)$ (HALPHEN, Fonct. Ell. I p. 218), waarin

$$\phi_3(u, v, w, \mu) = \begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u & \wp'' u \\ 1 & \wp v & \wp' v & \wp'' v \\ 1 & \wp w & \wp' w & \wp'' w \\ 1 & \wp\mu & \wp'\mu & \wp''\mu \end{vmatrix} \text{ is.}$$

De oorspronkelijke veranderlijken zijn derhalve verbonden door de beide vergelijkingen

$$\begin{vmatrix} \sqrt{X} & \sqrt{Y} & \sqrt{Z} & \sqrt{C} \\ x^2 & y^2 & z^2 & c^2 \\ x & y & z & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{X} & \sqrt{Y} & \sqrt{Z} & -\sqrt{A} \\ x^2 & y^2 & z^2 & a^2 \\ x & y & z & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = c_2 \begin{vmatrix} \sqrt{X} & \sqrt{Y} & \sqrt{Z} & \sqrt{A} \\ x^2 & y^2 & z^2 & a^2 \\ x & y & z & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A = 4a^3 - g_2a - g_3, \quad C = 4c^3 - g_2c - g_3.$$

Voor de eerste vergelijking schrijven wij

$$\frac{\sqrt{X}}{(y-x)(z-x)(c-x)}+\frac{\sqrt{Y}}{(z-y)(x-y)(c-y)}+\frac{\sqrt{Z}}{(x-z)(y-z)(c-z)}+\frac{\sqrt{C}}{(c-x)(c-y)(c-z)}=0.$$

De deeling door $(x-y)(y-z)(z-x)(c-x)(c-y)(c-z)$ is verricht om de oplossingen van $\phi_3(u, v, w, c_1)=0$ te elimineeren, die niet aan de eerste differentiaalvergelijking voldoen.

De tweede vergelijking wordt zonder moeite herleid tot

$$\frac{(a-y)(a-z)}{(x-y)(x-z)}\sqrt{X}+\frac{(a-z)(a-x)}{(y-z)(y-x)}\sqrt{Y}+\frac{(a-x)(a-y)}{(z-x)(z-y)}\sqrt{Z}=\text{const.}$$

Vraagstuk X.

08j. Kunnen de hoofdnormalen eener ruimtekromme tegelijk de binormalen zijn van eene tweede ruimtekromme?

(Dr. J. C. Kluyver.)

Opgelost *door* Dr. J. C. Kluyver, W. Mantel *en* J. Stein.

Oplossing *van* J. Stein.

1. Het regelvlak der binormalen eener ruimtekromme heeft de eigenschap, dat de kortste afstand van twee opeenvolgende richtlijnen een element is van de strictielijn. Die strictielijn is namelijk de kromme zelf, daar elk element loodrecht staat op twee opeenvolgende binormalen. Het regelvlak der hoofdnormalen van de eerste kromme (a) moet dus de genoemde eigenschap bezitten; zijn strictielijn is dan de eenige kromme (b), die aan de voorwaarde voldoet.

2. Laten x, y, z de coördinaten van een punt van (a) voorstellen, ξ, η, ζ die van 't punt van (b), dat op de hoofdnormaal van (x, y, z) gelegen is; ρ den afstand van (x, y, z) tot (ξ, η, ζ); λ, μ, ν de richtingscosinussen der hoofdnormaal. Men heeft dan

$$\begin{aligned}
\xi &= x+\lambda\rho, & d\xi &= dx+\lambda d\rho+\rho d\lambda,\\
\eta &= y+\mu\rho, & d\eta &= dy+\mu d\rho+\rho d\mu,\\
\zeta &= z+\nu\rho, & d\zeta &= dz+\nu d\rho+\rho d\nu.
\end{aligned}$$

De coördinaten ξ, η, ζ moeten nu voldoen aan de voorwaarden:

$$\lambda d\xi+\mu d\eta+\nu d\zeta=0,$$
$$d\lambda d\xi+d\mu d\eta+d\nu d\zeta=0.$$

De tweede is verkregen door op te merken, dat de richtingscosinussen der hoofdnormaal van (b) evenredig zijn met de afgeleiden van λ, μ, ν naar den boog (Formule van FRENET).

Hierin de bovenstaande waarden voor $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ substitueerende, vindt men

$$(\lambda dx + \mu dy + \nu dz) + (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)d\rho + (\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu)\rho = 0,$$
$$(d\lambda dx + d\mu dy + d\nu dz) + (\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu)d\rho + (d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2)\rho = 0,$$

Uit de eerste vergelijking volgt

$$d\rho = 0.$$

Uit de tweede

$$\rho = \frac{d\lambda dx + d\mu dy + d\nu dz}{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2} = \text{const.}$$

Stelt κ de kromming, τ de torsie voor, dan moet, met het oog op de formules van FRENET, de kromme (a) voldoen aan de voorwaarde

$$\frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} = \text{const.}$$

3. Men kan ook uitgaan van de kromme (b). Stelt nu (x, y, z) een punt van (b) voor, (ξ, η, ζ) het overeenkomstige punt van (a), en zijn α, β, γ de richtingscosinussen der binormaal van (b) in 't punt (x, y, z), dan heeft men

$$\begin{aligned} \xi &= x + \alpha\rho, & d\xi &= dx + \alpha d\rho + \rho d\alpha, \\ \eta &= y + \beta\rho, & d\eta &= dy + \beta d\rho + \rho d\beta, \\ \zeta &= z + \gamma\rho, & d\zeta &= dz + \gamma d\rho + \rho d\gamma. \end{aligned}$$

Nu moet de kromme (a) in (ξ, η, ζ) vooreerst loodrecht staan op de binormaal (α, β, γ); vervolgens moeten twee opeenvolgende elementen met deze zelfde lijn in één vlak liggen. Derhalve is te voldoen aan

$$(dx + \alpha d\rho + \rho d\alpha)\alpha + (dy + \beta d\rho + \rho d\beta)\beta + (dz + \gamma d\rho + \rho d\gamma)\gamma = 0,$$

waaruit volgt $d\rho = 0$, en aan

$$\begin{vmatrix} dx + \rho d\alpha & dy + \rho d\beta & dz + \rho d\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ d^2x + \rho d^2\alpha & d^2y + \rho d^2\beta & d^2z + \rho d^2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Neemt men raaklijn, binormaal en hoofdnormaal van (x, y, z)

achtereenvolgens tot X, Y en Z-as, dan vindt men gemakkelijk met behulp van de formules van FRENET

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\tau\rho \\ 0 & 1 & 0 \\ \tau\kappa\rho & -\tau^2\rho & \kappa - \tau'\rho \end{vmatrix} = 0,$$

waarin $\tau' = \frac{d\tau}{ds}$ is.

Voor de kromme (b) vinden wij dus de voorwaarde:

$$\kappa\tau^2\rho^2 - \tau'\rho + \kappa = 0, \quad \rho = \text{const.}$$

Vraagstuk XI.

06h. Aan te toonen, dat er minimaaloppervlakken zijn, die men kan laten ontstaan door een beweging van een veranderlijke schroeflijn met standvastigen spoed, die OX blijft snijden, en waarvan de as in XOZ en evenwijdig aan OZ blijft.

(Dr. J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* Dr. J. C. KLUYVER *en* J. STEIN.

Oplossing *van* J. STEIN.

Wij kunnen de veranderlijke schroeflijn voorstellen door:

$$x = \phi(u) + u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = kv;$$

u en v zijn dan kromlijnige coördinaten op het bedoelde oppervlak. Deze moeten nu voldoen aan de voorwaarde

$$EG' - 2FF' + E'G = 0.$$

Hier is achtereenvolgens

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$E' = A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$F' = A\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} + B\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} + C\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}, \quad G' = A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad C = \frac{\partial x}{du}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Bepaalt men deze grootheden, en substitueert de gevonden vormen in de bovenstaande vergelijking, dan bekomt deze de gedaante:

$$(u^2 + k^2)\frac{d^2\phi}{du^2} + u\left(\frac{d\phi}{du}\right)^3 - u\frac{d\phi}{du} = 0.$$

Schrijft men hiervoor

$$\frac{d\left(\frac{d\phi}{du}\right)}{\frac{d\phi}{du}\left[\left(\frac{d\phi}{du}\right)^2 - 1\right]} + \frac{udu}{u^2 + k^2} = 0,$$

dan levert een eerste integratie

$$\frac{\left(\frac{d\phi}{du}\right)^2 - 1}{\left(\frac{d\phi}{du}\right)^2}(u^2 + k^2) = c.$$

Dus heeft men verder

$$d\phi = du\sqrt{\frac{u^2 + k^2}{u^2 + k^2 - c}}, \quad \text{of, voor } u^2 = w,$$

$$d\phi = \frac{(w + k^2)dw}{\sqrt{4w(w + k^2)(w + k^2 - c)}}.$$

Stelt men, om het elliptisch argument in te voeren,

$$\left.\begin{aligned} w &= \wp s - e_\alpha \\ w + k^2 &= \wp s - e_\beta \\ w + k^2 - c &= \wp s - e_\gamma \end{aligned}\right\} \quad e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0,$$

dus $$\wp'^2 s = 4(\wp s - e_\alpha)(\wp s - e_\beta)(\wp s - e_\gamma),$$

dan wordt

$$d\phi = (\wp s - e_\beta)ds; \quad \phi = -(\zeta s + se_\beta) + c'; \quad u = \pm\sqrt{\wp s - e_\alpha}.$$

De bedoelde oppervlakken worden dus voorgesteld door

$$\begin{cases} x = \zeta s + s e_\beta + \cos v \sqrt{\wp s - e_\alpha}, \\ y = \sin v \sqrt{\wp s - e_\alpha}, \\ z = kv, \\ \wp'^2 s = 4(\wp s - e_\alpha)(\wp s - e_\beta)(\wp s - e_\gamma); \\ e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0;\ e_\alpha - e_\beta = k^2. \end{cases}$$

Een bijzondere oplossing is $c=0$, $e_2=e_3$, $\phi=u$; $x=u(1+\cos v)$, $y=u\sin v$, $z=k\,v$; dus het horizontale schroefvlak $z=2k\,\mathrm{bg\,tg}\,\frac{y}{x}$. Ook voor $\phi=0$ vindt men een dergelijk schroefvlak.

Vraagstuk XII.

H 5 d. Men vraagt de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\cot g\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

te integreeren. (Dr. S. Levänen).

Opgelost *door* J. Stein *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* Dr. J. de Vries.

De gegeven vergelijking kan omgezet worden in:

$$\frac{y'' - 2y}{\sin x + \cos x} = \frac{2y'}{\sin x - \cos x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Stellen wij de gemeenschappelijke waarde der beide leden door $\phi(x)$ voor, dan is

$$y'' - 2y = (\sin x + \cos x)\,\phi(x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

$$2y' = (\sin x - \cos x)\,\phi(x). \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Uit 3) volgt

$$2y'' = (\sin x - \cos x)\,\phi'(x) + (\cos x + \sin x)\,\phi(x) \quad \ldots \quad 4)$$

In verband met 2) vinden wij dus

$$4y = (\sin x - \cos x)\,\phi'(x) - (\sin x + \cos x)\,\phi(x) \quad \ldots \quad 5)$$

Door 5) te differentieeren en gebruik te maken van 3), verkrijgen wij ten slotte

$$\phi''(x) = \phi(x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Dus is

$$\phi(x) = Ae^{x} + Be^{-x}.$$

Uit 5) wordt dan voor de integraal der gegeven vergelijking gevonden

$$y = C_1 e^{x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x.$$

OPMERKING. Wanneer wij de gegeven vergelijking vervangen door

$$(\cos x - \sin x)(y'' - 2y) + 2(\cos x + \sin x)y' = 0,$$

dan vinden wij gemakkelijk $y^{IV} + 4y = 0$.

Oplossing *van* J. STEIN.

Wij stellen $x - \frac{\pi}{4} = u$, en brengen daarna de vergelijking tot den normaalvorm door de substitutie

$$y = ze^{\int \operatorname{cotg} u\, du} = z \sin u.$$

Dan wordt verkregen

$$\frac{1}{z}\frac{d^2z}{du^2} = \frac{2}{\sin^2 u} + 1.$$

Deze vergelijking ontstaat uit de vergelijking van LAMÉ,

$$\frac{1}{z}\frac{d^2z}{du^2} = n(n+1)\wp u + l,$$

door de substituties

$$n = 1,\ l = \frac{5}{3},\ e_1 = \frac{2}{3},\ e_2 = e_3 = -\frac{1}{3},\ \omega_1 = \frac{\pi}{2},\ \omega_2 = \omega_3 = \infty.$$

Nu is (zie APPELL et LACOUR, Fonct. Ell., p. 345) de oplossing van

$$\frac{1}{z}\frac{d^2z}{du^2} = 2\wp u + \wp a$$

gegeven door

$$z = C_1 \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u} e^{-u\zeta a} + C_2 \frac{\sigma(u-a)}{\sigma u} e^{u\zeta a}.$$

In het gegeven geval is nu

$$\sigma u = e^{\frac{1}{3}u^2} \sin u, \qquad \zeta u = \operatorname{cotg} u + \tfrac{1}{3}u,$$

$$pu = -\tfrac{1}{3} + \frac{1}{\sin^2 u},\ pa = -\tfrac{1}{3} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} = \tfrac{5}{3},\ \zeta a = 1 + \frac{\pi}{12},$$

$$\sigma(u+a) = e^{\frac{1}{2}\left(u+\frac{\pi}{4}\right)^2} \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right),\ \sigma(u-a) = e^{\frac{1}{2}\left(u-\frac{\pi}{4}\right)^2} \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right).$$

dus

$$z \sin u = C_1 \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) e^{-u} + C_2 \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right) e^{u}.$$

De gegeven vergelijking heeft dus tot integraal

$$y = C_1 e^{-x} \sin x + C_2 e^{x} \cos x.$$

Vraagstuk XIII.

R 9 b α. Een volkomen veerkrachtige bol stuit met een snelheid van 5 M. per sec. tegen een even grooten, stil liggenden bol. Gedurende de aanraking drukken de bollen tegen elkaar met een kracht, die evenredig is met de indeuking. De grootste waarde der indeuking is 0,0001 M. Hoelang duurt de aanraking?

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL, J. STEIN *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* J. STEIN.

Wij onderstellen, dat de botsing centraal is en de bollen geheel van dezelfde samenstelling zijn. Wij nemen den meter als eenheid van lengte, de seconde als eenheid van tijd aan en stellen de massa van elken bol gelijk aan één. De eerste bol bewege zich in de richting der X-as; zij x_1 de x-coördinaat van 't middelpunt van dezen bol, x_2 die van den tweeden bol. Zij s de indeuking van een der beide bollen; de drukking kan dan door $A^2 s$ voorgesteld worden. Nu is

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = -A^2 s, \quad \frac{d^2 z_2}{dt^2} = +A^2 s,$$

dus

$$\frac{d^2(z_2 - z_1)}{dt^2} = 2A^2 s.$$

Stelt r den straal van beide bollen voor, dan is $z_2 - z_1 = 2r - 2s$,

dus $$\frac{d^2(z_2 - z_1)}{dt^2} = -2\frac{d^2s}{dt^2} = 2A^2s,$$

en $$s = C_1 \cos At + C_2 \sin At.$$

In 't begin der botsing is $t = 0$, $s = 0$; dus $C_1 = 0$.

Het maximum van s is 0,0001; dus $C_2 = 0{,}0001$.

Verder is de tijd van aanraking $T = \pi : A$.

Als s zijn maximum heeft, is de snelheid der beide bollen $\frac{5}{2}$; dus hun gezamenlijke levende kracht is dan $\frac{25}{4}$. De arbeid der krachten is dus $\frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$ geweest.

Dezen arbeid vinden wij eveneens uit

$$2A^2 \int_0^{0,0001} s\, ds = A^2 \times 10^{-8}.$$

Dus $$A^2 \times 10^{-8} = \frac{25}{4}.$$

$$A = \frac{5}{2} . 10^4; \quad T = \frac{\pi}{A} = \frac{\pi}{25000} = 0{,}0001257 \text{ sec.}$$

Vraagstuk XIV.

A 3 j. Zijn alle wortels der vergelijkingen

$$f(x) \equiv a_0x^m + a_1x^{m-1}y + a_2x^{m-2}y^2 \ldots + a_my^m = 0,$$

$$g(x) \equiv b_0x^n + b_1x^{n-1}y + b_2x^{n-2}y^2 \ldots + b_ny^n = 0$$

bestaanbaar, dan heeft ook de vergelijking

$$\phi(x) \equiv b_0\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + b_1\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} + b_2\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2} \ldots + b_n\frac{\partial^n f}{\partial y^n} = 0$$

enkel bestaanbare wortels. (J. NEUBERG).

Oplossing *van* W. MANTEL.

Indien $f(x, y)$ voor m bestaanbare waarden der verhouding $x : y$ nul wordt, dan zullen, volgens de stelling van ROLLE, f'_x en f'_y voor $(m - 1)$ waarden van $x : y$ nul worden. Hierbij ligt telkens één wortel van f'_y tusschen twee op elkander volgende wortels van f'_x. Want voor twee zulke wortels heeft $f(x, y)$ verschillende teekens; dit geldt dus ook voor yf'_y, dat gelijk aan $mf(x, y) - xf'_x$.

De verhouding $f'_x : f'_y$ doorloopt dus alle bestaanbare waarden

$(m-1)$ keer als $x:y$ dit één keer doet. Derhalve heeft de vergelijking

$$f'_x - p_1 f'_y = 0$$

$(m-1)$ bestaanbare wortels.

Wordt deze stelling toegepast op het eerste lid der voorgaande vergelijking, dan ziet men, dat de vergelijking

$$(f''_x - p_1 f''_{xy}) - p_2(f''_{xy} - p_1 f''_y) = 0$$

$(m-2)$ bestaanbare wortels heeft. Op deze vergelijking kan de stelling weer worden toegepast en zoo voort.

Algemeen heeft dus

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} - (p_1 + p_2 + \ldots)\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} + (p_1 p_2 + \ldots)\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2} - \ldots = 0$$

louter bestaanbare wortels, wat met het gestelde overeenkomt, daar men kan onderstellen, dat p_i ($i = 1$ tot n) de wortels zijn van $g(x) = 0$.

Vraagstuk XV.

K 20 d. Men vraagt, de uitdrukking

$$\frac{\cos(x-a_1)\cos(x-a_2)\ldots\cos(x-a_n)}{\cos(x-b_1)\cos(x-b_2)\ldots\cos(x-b_n)}$$

te herleiden tot den vorm

$$k_0 + k_1 \operatorname{tg}(x-b_1) + k_2 \operatorname{tg}(x-b_2) \ldots k_n \operatorname{tg}(x-b_n),$$

waar k_i grootheden zijn, die niet van x afhangen.

(J. Neuberg).

Opgelost *door* T. J. Allersma, Dr. A. J. A. Prange, J. Stein *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* Dr. C. Stolp.

Wanneer men in de uitdrukking

$$F(x) \equiv \frac{\cos(x-a_1)\cos(x-a_2)\ldots\cos(x-a_n)}{\cos(x-b_1)\cos(x-b_2)\ldots\cos(x-b_n)} \ldots\ldots\ldots 1)$$

alle cosinussen ontwikkelt, vervolgens teller en noemer door $\cos^n x$ deelt en dan de breuk als functie van $\operatorname{tg} x$ beschouwt, zal men, na splitsing in gedeeltelijke breuken, een uitkomst krijgen van den vorm

$$F(x) = c_0 + \frac{c_1}{\operatorname{tg} x + \cot b_1} + \frac{c_2}{\operatorname{tg} x + \cot b_2} + \ldots\ldots + \frac{c_n}{\operatorname{tg} x + \cot b_n}.$$

Op elk der afzonderlijke breuken kan men de volgende herleiding toepassen:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x + \cot b} = \frac{\sin b \cos x}{\cos (x - b)} = \frac{\sin b \cos [b + (x - b)]}{\cos (x - b)} =$$

$$= \frac{\sin b [\cos b \cos (x - b) - \sin b \sin (x - b)]}{\cos (x - b)} = \tfrac{1}{2} \sin 2b - \sin^2 b \operatorname{tg}(x - b).$$

De vergelijking 1) wordt dan vervangen door

$$F(x) = c_0 + \tfrac{1}{2} \sum_1^n c_k \sin 2b_k - \sum_1^n c_k \sin^2 b_k \operatorname{tg} (x - b_k),$$

of, na samenvatting van grootheden, die niet van x afhangen,

$$F(x) = k_0 + k_1 \operatorname{tg} (x - b_1) + k_2 \operatorname{tg} (x - b_2) + \ldots + k_n \operatorname{tg} (x - b_n) \ldots . 2).$$

Nu de mogelijkheid der gevraagde herleiding is aangetoond (natuurlijk moeten de b's in grootte verschillen), mag men de methode der onbepaalde coëfficienten toepassen.

Vermenigvuldigen wij beide leden van 2) met $\cot (x - b_1)$ en stellen daarna $x = b_1 + \frac{\pi}{2}$, dan houden wij in het tweede lid alleen k_1 over. Wat het eerste lid betreft, vinden wij uit 1)

$$\frac{\cos (x - b_1)}{\sin (x - b_1)} F(x) = \frac{\cos (x - a_1)}{\sin (x - b_1)} \cdot \frac{\cos (x - a_2) \ldots . \cos (x - a_n)}{\cos (x - b_2) \ldots . \cos (x - b_n)};$$

derhalve is voor $x = b_1 + \frac{\pi}{2}$

$$k_1 = \sin (a_1 - b_1) \cdot \frac{\sin (a_2 - b_1) \sin (a_3 - b_1) \ldots . \sin (a_n - b_1)}{\sin (b_2 - b_1) \sin (b_3 - b_1) \ldots . \sin (b_n - b_1)} \ldots . 3)$$

Voor de berekening van k_2, k_3 enz. kan men op dezelfde wijze te werk gaan, maar de uitkomsten worden gemakkelijker door verwisseling van indices uit 3) gevonden. Zijn al die waarden bepaald, dan kan men k_0 vinden door aan x een bepaalde waarde te geven. Voor $x = 0$ b.v. heeft men

$$k_0 = F(0) + k_1 \operatorname{tg} b_1 + k_2 \operatorname{tg} b_2 \ldots . + k_n \operatorname{tg} b_n.$$

Voor $x = \frac{\pi}{2}$ geeft 2) een dergelijke vergelijking. Wil men een term minder hebben, dan moet men aan x óf een der

waarden b_k geven, òf een der waarden $a_i + \frac{\pi}{2}$, die F (x) tot 0 maken. In het laatste geval komt er

$$k_0 = k_1 \cot(a_i - b_1) + k_2 \cot(a - b_2) + \ldots + k_n \cot(a_i - b_n).$$

Vraagstuk XVI.

0 5 c. Door de snijlijn van het gegeven vlak π met het raakvlak α van een gegeven oppervlak Σ brengt men een vlak α', dat loodrecht staat op α. De omhullende der vlakken α' is een tweede oppervlak Σ'. Men vraagt te bewijzen, dat de normalen van Σ en Σ' in twee overeenkomstige punten elkaar snijden.

(J. Neuberg).

Oplossing *van* J. Neuberg.

We nemen π tot XY-vlak, en wijzen door (x, y, z) een punt van Σ aan, door p en q de afgeleiden van z naar x en y.

Het vlak α wordt dan voorgesteld door

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0 \ldots\ldots\ldots 1),$$

het vlak α' door

$$mZ - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0.$$

Wegens den loodrechten stand van α en α' heeft men evenwel te voldoen aan $p^2 + q^2 + m = 0$. Derhalve is de vergelijking van α'

$$(p^2 + q^2) Z + z + p(X - x) + q(Y - y) = 0 \ldots\ldots 2)$$

De doorsnede van α' met het vlak α' dat door het punt $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ van Σ bepaald is, wordt voorgesteld door 2) en

$$(2pdp + 2qdq) Z + dz + (X - x)\, dp + (Y - y)\, dq - pdx - qdy = 0.$$

Wegens $dz = pdx + qdy$ kan hiervoor geschreven worden

$$(2pZ + X - x)\, dp + (2qZ + Y - y)\, dq = 0.$$

De bedoelde snijlijn beantwoordt dus, voor elke waarde van $dp : dq$, aan de voorwaarden

$$2pZ + X - x = 0, \qquad 2qZ + Y - y = 0 \ldots. 3)$$

Voor het raakpunt M′ van α' met Σ' heeft men uit 2) en 3)

$$Z = \frac{z}{p^2+q^2},\ X = x - \frac{2pz}{p^2+q^2},\ Y = y - \frac{2qz}{p^2+q^2} \ldots 4).$$

Om de beteekenis van deze betrekkingen gemakkelijk te kunnen inzien, laten we de as OX samenvallen met de snijlijn van α en π en leggen het vlak YOZ door het raakpunt M van α.

Daar men nu heeft $x = 0$, $p = 0$ en $z = qy$, gaan de vergelijkingen 4) over in

$$X = 0,\quad Y = -y,\quad Z = \frac{y}{q}.$$

Uit de eerste dezer betrekkingen volgt, dat M′ ook in het vlak YOZ ligt; de normalen in M en M′ moeten elkaar dus snijden.

Uit de tweede betrekking blijkt verder, dat de rechte MM′ door OZ wordt middendoor gedeeld. Daar nu MOM′ een rechte hoek is, moet het snijpunt der normalen op OZ liggen.

Opmerking. De overeenkomstige transformatie in het vlak is door Cesaro, onder den naam van „transformation orthotangentielle", behandeld.

Vraagstuk XVII.

L[1] 16 a. Door de hoekpunten A, B, C van een driehoek trekt men drie rechten, welke de overstaande zijden in A_1, B_1, C_1 snijden en met AB, BC, CA, in denzelfden zin, den hoek θ vormen. Men trekt verder de rechten, die symmetrisch zijn met AA_1, BB_1, CC_1 ten opzichte van de rechten, die de hoeken A, B, C middendoor deelen; zij snijden de overstaande zijden in drie punten A_2, B_2, C_2, welke met A_1, B_1, C_1 door een kegelsnee Σ kunnen verbonden worden.

Voor welke waarden van θ ontaardt Σ in twee rechten?

De omhullenden te bepalen van de zijden der driehoeken $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ en van de rechten B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2.

(J. Neuberg.)

Oplossing *van* T. J. Allersma *en* Dr. A. J. A. Prange.

I. Wij nemen ABC tot assendriehoek aan. Stellen wij ter bekorting

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \cot\theta\,, \\ \alpha &= \sin(A-\theta) : \sin\theta = \tau\sin A - \cos A\,, \\ \beta &= \sin(B-\theta) : \sin\theta = \tau\sin B - \cos B\,, \\ \gamma &= \sin(C-\theta) : \sin\theta = \tau\sin C - \cos C\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 1)$$

dan worden AA_1, BB_1, CC_1 voorgesteld door

$$y = \alpha z \quad , \quad z = \beta x \quad , \quad x = \gamma y\,,$$

AA_2, BB_2, CC_2 door

$$z = \alpha y \quad , \quad x = \beta z \quad , \quad y = \gamma x.$$

Het lijnenpaar AA_1, AA_2 heeft dus tot vergelijking

$$y^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) yz + z^2 = 0.$$

Hieruit blijkt terstond, dat de zes punten A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 verbonden worden door de kegelsnede

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) yz - \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) zx - \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) xy = 0 \ldots 2)$$

Deze vergelijking zal twee rechte lijnen voorstellen, wanneer voldaan is aan

$$\begin{vmatrix} -2 & \gamma + \frac{1}{\gamma} & \beta + \frac{1}{\beta} \\ \gamma + \frac{1}{\gamma} & -2 & \alpha + \frac{1}{\alpha} \\ \beta + \frac{1}{\beta} & \alpha + \frac{1}{\alpha} & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots 3)$$

Duidt men den onderdeterminant van $\Delta = \pm\,\Sigma\, d_{11}d_{22}d_{33}$, die bij d_{ik} behoort, door het teeken D_{ik} aan, dan heeft men de betrekking $d_{11}\Delta = D_{22}D_{33} - D^2_{23}$, of

$$d_{11}\Delta = (d_{11}d_{33} - d^2_{13})(d_{11}d_{22} - d^2_{12}) - (d_{11}d_{23} - d_{12}d_{13})^2.$$

Hiervan gebruik makende, kan men 3) vervangen door

$$\alpha^2(\beta^2-1)^2(\gamma^2-1)^2 - [\alpha(\beta^2+1)(\gamma^2+1) + 2\beta\gamma(\alpha^2+1)]^2 = 0.$$

En nu blijkt gemakkelijk, dat deze vergelijking kan herleid worden tot

$$(1 + \alpha\beta\gamma)(\alpha + \beta\gamma)(\beta + \gamma\alpha)(\gamma + \alpha\beta) = 0.$$

Hieruit volgt, dat Σ ontaardt

1°. als θ voldoet aan

$$\sin A \sin B \sin C (\cot^3\theta + \cot\theta) - (1 + \cos A \cos B \cos C) \cot^2\theta - \\ - \cos A \cos B \cos C + 1 = 0;$$

2°. als men heeft

$$\cot^2\theta = 1 - 2 \cot B \cot C,$$

of $$\cot^2\theta = 1 - 2 \cot C \cot A,$$

of $$\cot^2\theta = 1 - 2 \cot A \cot B.$$

II. De vergelijking van een rechte lijn door A_1 is

$$\lambda x + y - \alpha z = 0.$$

Deze rechte gaat door B_1, wanneer $\lambda = \alpha\beta$ is.

Dus wordt A_1B_1 voorgesteld door

$$\alpha\beta x + y - \alpha z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4).$$

Substitueeren wij hierin de waarden van α en β uit 1) en elimineeren dan τ tusschen 4) en hare afgeleide ten opzichte van τ, dan vinden wij, na eenige herleiding, voor de vergelijking der omhullende van A_1B_1

$$K_1 \equiv \{x \sin (A - B) + z \sin A\}^2 - 4xy \sin A \sin B = 0 \ldots 5).$$

Deze omhullende K_1 is een kegelsnede, welke BC in B en CA in een punt G_1 aanraakt; de raakkoorde BG_1 maakt met BC een hoek CBG_1, die gelijk is aan hoek BAC.

Door verwisseling van x en y, A en B vinden wij uit 5) de vergelijking der omhullende van A_2B_2,

$$K_2 \equiv \{y \sin (B - A) + z \sin B\}^2 - 4xy \sin A \sin B = 0 \ldots 6).$$

Deze omhullende is een kegelsnede, welke AC in A en CB in een punt G_2 aanraakt; de raakkoorde AG_2 maakt met AC een hoek CAG_2 gelijk aan hoek ABC. De raakkoorden AG_2 en BG_1 zijn evenwijdig.

Door cyclische verwisseling der letters, vinden wij uit 5) en 6) de vergelijkingen der omhullenden van B_1C_1, C_1A_1, B_2C_2, C_2A_2.

III. De door A_1 getrokken rechte

$$\lambda x + y - \alpha z = 0$$

gaat door B_2 indien men heeft

$$\lambda\beta - \alpha = 0;$$

derhalve is de vergelijking van A_1B_2:

$$\alpha x + \beta y - \alpha\beta z = 0.$$

Handelende als boven, vinden wij voor de vergelijking der omhullende van A_1B_2:

$$L \equiv (x \sin A + y \sin B + z \sin C)^2 -$$

$$- 4z \sin A \sin B (x \cos A + y \cos B + z \cos A \cos B) = 0,$$

of

$$L \equiv \{x \sin A + y \sin B + z \sin (A - B)\}^2 - 4yz \sin B \sin (A - B) = 0.$$

Deze omhullende is een hyperbool, die de zijden van driehoek ABC aanraakt; AB is een asymptoot; de raakpunten D en E van L met BC en AC liggen in de loodlijn op 't midden van AB. Het middelpunt M, bepaald door de vergelijkingen

$$z = 0, \quad x \cos A + y \cos B = 0,$$

en het voetpunt F der hoogtelijn op AB zijn harmonisch toegevoegd ten opzichte van A en B.

Op dezelfde wijze vinden wij de vergelijkingen der omhullenden van B_1C_2 en C_1A_2.

Vraagstuk XVIII.

M² 7 c. Als u een veranderlijke parameter is, stelt

$$f(u) \equiv u^8 - 28u^6 + 70u^4 + 28xu^2 + 8yu + z = 0$$

een oneindig aantal vlakken voor. Gevraagd de dubbelkromme van het door deze vlakken omhulde ontwikkelbare oppervlak te bepalen. (Dr. P. H. SCHOUTE)

Oplossing van Dr. P. H. SCHOUTE.

1. We zoeken eerst de kenmerkende getallen van het ontwikkelbaar oppervlak. Deze kunnen worden opgeschreven, zoodra we den graad der keerkromme kennen. Uit de drie vergelijkingen $f(u) = 0$, $f'(u) = 0$ en $f''(u) = 0$ de coördinaten x, y, z oplossende, vinden we

$$\left.\begin{aligned} x &= -\ u^6 + 15u^4 - 15u^2, \\ y &= 6u^7 - 84u^5 + 70u^3, \\ z &= -21u^8 + 280u^6 - 210u^4, \end{aligned}\right\}$$

waaruit blijkt, dat de keerkromme een rationale kromme van den achtsten graad is.

Beschouwen we nu een vlakke doorsnee van het ontwikkelbaar oppervlak, dan blijkt, dat van deze drie der kenmerkende getallen bekend zijn, nl. de klasse (de graad van $f(u)$), het geslacht *nul* en het aantal keerpunten (de graad der keerkromme). Volgens de notatie van SALMON's „Geometry of three dimensions" (vierde druk, blz. 289—299) vinden we voor de kenmerkende getallen dezer doorsnee

$$\begin{aligned} &\text{klasse} = n = 8, \text{ graad} = r = 9, \\ &\text{aantal dubbelpunten} = x = 20, \\ &\text{aantal keerpunten} = m = 8, \\ &\text{aantal dubbelraaklijnen} = g = 16, \\ &\text{aantal buigpunten} = \alpha = 5. \end{aligned}$$

Verder geeft de beschouwing van den kegel, die een willekeurig gegeven punt tot top en de keerkromme tot richtlijn heeft, wijl van deze de graad ($= m$), de klasse ($= r$), het geslacht *nul* en het aantal buigpunten ($= n$) bekend zijn,

$$\begin{aligned} &\text{graad} = m = 8, \quad \text{klasse} = r = 9, \\ &\text{aantal dubbelraakvlakken} = y = 20, \\ &\text{aantal buigribben} = n = 8, \\ &\text{aantal dubbelribben} = h = 16, \\ &\text{aantal keerribben} = \beta = 5. \end{aligned}$$

Hieruit blijkt, dat het ontwikkelbaar oppervlak een volledige reciprociteit vertoont. We hebben nl.

$$\begin{aligned} m = n &= 8, \\ \alpha = \beta &= 5, \\ g = h &= 16, \\ x = y &= 20. \end{aligned}$$

Bij het zoeken van de dubbelkromme, waartoe we straks overgaan, zal blijken, dat deze wederkeerigheid zich nog verder uitstrekt.

2. Doch voor dat we dit doen, wenschen we op twee punten te wijzen, waarvan het eerste met de uitkomst $r = 9$, het tweede met de uitkomst $\beta = 5$ in verband staat.

De uitkomst $r = 9$ wijkt af van de algemeene. Wijl nl. de discriminant van een vorm $f(u)$ van den n^{den} graad, in de coëfficiënten van dezen vorm tot den graad $2(n - 1)$ opklimt, had men hier de uitkomst $r = 14$ mogen verwachten. De verlaging van $r = 14$ tot $r = 9$ is aan twee redenen toe te schrijven, aan het ontbreken van den term u^7 en aan het standvastig zijn der eerste coëfficiënten.

De uitkomst $\beta = 5$ wordt uiterst gemakkelijk geverifieerd. Immers een punt, waardoor vier opeenvolgende vlakken $f(u) = 0$ gaan, wordt bepaald door de voorwaarden $f(u) = 0$, $f'(u) = 0$, $f''(u) = 0$, $f'''(u) = 0$, d. i. door de drie vergelijkingen, die de keerkromme doen vinden, en door de vergelijking

$$u^5 - 10u^3 + 5u = 0,$$

welke vijf waarden van u levert.

Deze laatste vergelijking wordt ook uit de keerkromme zelf afgeleid. Want ze is het gemeenschappelijk resultaat van de drie voorwaarden $\frac{dx}{du} = 0$, $\frac{dy}{du} = 0$, $\frac{dz}{du} = 0$; hieruit volgt tevens dat bij de vijf waarden $u = 0$, $u = \pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}}$ vijf bestaanbare keerpunten der keerkromme behooren.

3. We gaan thans over tot de beschouwing der dubbelkromme. Voor ieder punt dezer kromme, die nu reeds gebleken is van den graad $x = 20$ te zijn, heeft de vergelijking $f(u) = 0$ twee paren gelijke wortels. We kunnen dus stellen

$$f(u) = (u^2 + pu + q^2)^2 (u^4 + au^3 + bu^2 + cu + d),$$

en vinden dan door gelijkstelling der coëfficiënten de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned}
0 &= a + 2p, \\
-28 &= b + 2ap + (p^2 + 2q^2), \\
0 &= c + 2bp + a(p^2 + 2q^2) + 2pq^2, \\
70 &= d + 2cp + b(p^2 + 2q^2) + 2apq^2 + q^4, \\
0 &= 2dp + (cp^2 + 2q^2) + 2bpq^2 + aq^4,
\end{aligned}\right\}$$

en verder

$$\left.\begin{aligned} 28x &= d(p^2 + 2q^2) + 2cpq^2 + bq^4, \\ 8y &= \qquad\qquad\qquad 2dpq^2 + cq^4, \\ z &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad dq^4. \end{aligned}\right\}$$

De eerste vijf betrekkingen leveren

$$\begin{aligned} a &= -2p, \\ b &= 3p^2 - 2q^2 - 28, \\ c &= -4p^3 + 6pq^2 + 56p, \\ d &= 5p^4 - 12p^2q^2 + 3q^4 - 84p^2 + 56q^2 + 70, \end{aligned}$$

en

$$2p\{3p^4 - 10p^2q^2 + 6q^4 - 56p^2 + 84q^2 + 70\} = 0.$$

Blijkens de laatste voorwaarde splitst de gezochte dubbelkromme zich in twee deelen, waarvan het eerste met $p = 0$, het tweede met

$$3p^4 - 10p^2q^2 + 6q^4 - 56p^2 + 84q^2 + 70 = 0$$

in verband staat.

Deze splitsing was te voorzien. Immers, uit de vergelijkingen der keerkromme blijkt, dat het vlak $y = 0$ een symmetrievlak van het ontwikkelbaar oppervlak is; want door aan u achtereenvolgens twee gelijke en tegengestelde waarden te geven, vinden we twee met betrekking tot het vlak $y = 0$ symmetrisch gelegen punten.

In verband hiermee hebben ook de vijf stationaire punten, blijkens de vergelijking $u^5 - 10u^3 + 5u = 0$, een symmetrische ligging ten opzichte van dit vlak. Want $u = 0$ geeft den oorsprong en de twee waarden $u^2 = 5 \pm 2\sqrt{5}$ geven twee ten opzichte van $y = 0$ symmetrisch gelegen paren.

We beschouwen de beide deelen der dubbelkromme afzonderlijk.

4. De vlakke dubbelkromme is in het vlak $y = 0$ de omhullende van de rechte, welke voorgesteld wordt door

$$\psi(v) \equiv v^4 - 28v^3 + 70v^2 + 28xv + z = 0.$$

Haar vergelijking vindt men door in $f(u) = 0$ te stellen $y = 0$ en $u^2 = v$.

In verband met

$$\psi'(v) \equiv 4v^3 - 84v^2 + 140v + 28x = 0,$$

levert zij het stelsel

$$7x = v(v^2 - 21v + 35), \quad z = v^2(3v^2 - 56v + 70);$$

dus is de kromme rationaal en van graad en klasse vier. Immers het geslacht en de graad volgen uit de uitdrukkingen voor x en z, terwijl de klasse door den graad van $\psi(v)$ in v wordt aangegeven.

We bepalen nu de bijzondere punten dezer kromme.

Voor de keerpunten geldt tegelijkertijd $\frac{dx}{dv} = 0$ en $\frac{dz}{dv} = 0$. Beide voorwaarden geven dan ook behoorlijk dezelfde betrekking $3v^2 - 42v + 35 = 0$, of $v = 7 \pm \frac{4}{3}\sqrt{21}$, welke waarden trouwens tevens kunnen worden afgeleid uit de vergelijking $\frac{d^2\psi}{dv^2} = 0$. Er zijn dus twee keerpunten; hun coördinaten volgen uit de gevonden waarden van v.

In een dubbelpunt nemen de coördinaten x en z voor twee *verschillende* waarden v_1 en v_2 gelijke waarden aan. Uit de voorwaarden

$$v_1^3 - 21v_1^2 + 35v_1 = v_2^3 - 21v_2^2 + 35v_2,$$

$$3v_1^4 - 56v_1^3 + 70v_1^2 = 3v_2^4 - 56v_2^3 + 70v_2^2$$

volgt, na deeling door $v_1 - v_2$, als men kortheidshalve $v_1 + v_2$ en v_1v_2 door r en s^2 voorstelt,

$$r^2 - s^2 - 21r + 35 = 0,$$

$$3r(r^2 - 2s^2) - 56(r^2 - s^2) + 70r = 0,$$

en dus na eliminatie van s

$$3r^3 - 126r^2 + 1316r - 1960 = 0.$$

We vinden hier een derdemachtsvergelijking in r, terwijl er toch volgens de formules van PLÜCKER naast de beide keerpunten nog slechts een enkel dubbelpunt kan zijn. Deze schijnbare tegenstrijdigheid wordt opgeheven door de opmerking, dat het aangegeven onderzoek naar de dubbelpunten de keerpunten insluit. Voor het paar keerpunten heeft r de waarden $14 \pm \frac{8}{3}\sqrt{21}$; dus moet de gevonden vergelijking door

$3r^2 - 84r + 140$ deelbaar zijn. Werkelijk geeft de deeling $r - 14 = 0$, waaruit blijkt, dat de waarden $r = 14$, $s^2 = -63$ en de hiermee overeenstemmende wortels $v = 7 \pm 4\sqrt{7}$ van van de vergelijking $v^2 - 14v - 63 = 0$ aan het eenige dubbelpunt beantwoorden.

Het onderzoek der kromme in tangentiëele coördinaten λ, ν brengt een bijzonderheid aan het licht. Zijn deze coördinaten door de betrekking $\lambda x + \nu z + 1 = 0$ met de puntcoördinaten verbonden, dan volgt uit $\psi(v) = 0$ het stelsel

$$\lambda = \frac{28}{v(v^2 - 28v + 70)}, \quad \nu = \frac{1}{v^2(v^2 - 28v + 70)}.$$

Stelt men ter bekorting $\lambda = 28\mu$, dan volgt hieruit door eliminatie van ν,

$$\mu^2(\mu^2 - 28\mu\nu + 70\nu^2) = \nu^3.$$

Hieruit blijkt, dat de kromme een bijzonderheid van hooger orde vertoont: de lijn in het oneindige is drievoudige raaklijn in het op OZ gelegen punt, dat door $\nu = \infty$ wordt aangewezen.

De kromme is in fig. 1 voorgesteld. Laat men ν van $-\infty$ tot $+\infty$ veranderen, dan ontmoet men in de genummerde punten de volgende bijzonderheden.

	ν	
1	$-\infty$	punt oneindig ver (x en z positief)
2	$-3{,}58\ldots$	dubbelpunt
3	0	keerpunt der kromme
4	$0{,}89\ldots$	keerpunt
5	$1{,}35\ldots$	$z = 0$
6	$1{,}84\ldots$	$x = 0$
7	$13{,}11\ldots$	keerpunt
8	$17{,}32\ldots$	$z = 0$
9	$17{,}58\ldots$	dubbelpunt
10	$19{,}16\ldots$	$x = 0$
11	∞	punt oneindig ver (x negatief, z positief.)

We merken nog op, dat uit den graad der dubbelkromme opnieuw blijkt, dat het ontwikkelbaar oppervlak zelf van den negenden graad moet zijn. Want de doorsnee van het oppervlak bestaat uit deze kromme dubbel geteld, en een beschrij-

vende lijn, de rechte behoorende bij de waarde nul van u, dus de x-as.

5. We gaan thans over tot de dubbelkromme in de ruimte. Omdat de berekeningen hier vrij bewerkelijk worden, bepalen we ons echter tot enkele aanwijzingen.

Wijl de geheele dubbelkromme van den twintigsten graad is, blijft er, na afzondering van de gevonden vlakke kromme, een ruimtekromme van den zestienden graad over. Zij wordt voorgesteld door de vergelijkingen

$$28x = 5p^6 - 10p^4q^2 - 6p^2q^4 + 4q^6 - 84p^4 + 84q^4 + 70p^2 + 140q^2,$$
$$4y = (5p^4 - 14p^2q^2 + 6q^4 - 84p^2 + 84q^2 + 70)pq^2,$$
$$z = (5p^4 - 12p^2q^2 + 3q^4 - 84p^2 + 56q^2 + 70)q^4,$$

terwijl p en q aan elkaar gebonden zijn door de betrekking

$$3p^4 - 10p^2q^2 + 6q^4 - 56p^2 + 84q^2 + 70 = 0.$$

Oplossing dezer laatste vergelijking geeft

$$3p^2 = 5q^2 + 28 \pm \sqrt{7(q^4 + 4q^2 + 82)}.$$

Door deze waarde in de vormen voor x, y, z in te voegen drukt men de coördinaten in q alleen uit en kan men dus zooveel punten der kromme bepalen als men wil. Doch men bepaalt den vorm der ruimtekromme gemakkelijker door het oppervlak te *construeeren* op de wijs, waarop dit o. a. in het *Zittingsverslag der K. Akad. van Wetenschappen* van Mei 1893 is aangewezen. Onder verwijzing daarheen merken we op, dat de doorsnee van het ontwikkelbaar oppervlak met het vlak $x = x_1$ voorgesteld wordt door de vergelijkingen $f(u) = 0$ en $f'(u) = 0$, waarin x door x_1 is vervangen. Construeert men deze doorsnee

$$\left.\begin{aligned} y &= -u(u^6 - 21u^4 + 35u^2 + 7x_1) \\ z &= 7u^2(u^6 - 20u^4 + 30u^2 + 4x_1) \end{aligned}\right\}$$

voor twee verschillende waarden van x_1 en vereenigt dan de bij dezelfde waarden van u behoorende punten dier krommen door draden, dan ontstaat met het geraamte van het oppervlak tevens de dubbelkromme, zoowel de vlakke als de niet in een vlak gelegen kromme.

De doorsnee van het ontwikkelbaar oppervlak met het vlak $x = x_1$ is een rationale kromme van graad en klasse acht, die door de oneindig ver gelegen lijn van het vlak — de bij $u = \infty$

behoorende beschrijvende lijn van het ontwikkelbaar oppervlak — tot de volledige doorsnee van den negenden graad wordt aangevuld. Zij bezit volgens de PLÜCKER'sche formules zes keerpunten en vijftien dubbelpunten. Dit wordt gemakkelijk gecontroleerd. Ten eerste ziet men uit de eerste der drie vergelijkingen van de keerkromme (zie onder no. 1), dat bij een gegeven $x = x_1$ drie waarden van u^2 en dus zes punten der keerkromme behooren, wat dan in het voorbijgaan doet opmerken, dat de lijn in het oneindige van het vlak $x = x_1$ twee punten met de keerkromme gemeen heeft; werkelijk is deze lijn raaklijn aan de keerkromme in het oneindig ver gelegen punt der z-as en heeft deze kromme dus een parabolischen tak. En ten tweede snijdt het vlak $x = x_1$ de dubbelkromme in vijftien in het eindige gelegen punten en wel het vlakke deel in drie en het niet vlakke deel in twaalf. Want $7x_1 = -v(v^2 - 21v + 35)$ doet drie waarden van v kennen; werkelijk ligt (zie fig. 1) een punt van het vlakke deel der dubbelkromme in de richting der z-as oneindig ver. En eindelijk geeft invoeging van $x = x_1$ in de eerste der drie boven gegeven vergelijkingen der dubbelkromme in de ruimte een vergelijking, die in p^2 en q^2 van den derden graad is en dus met de kwadratische vergelijking, welke het verband tusschen deze grootheden aangeeft, zes stel waarden van p^2 en q^2 en dus — zie de vergelijking die y bepaalt — zes *paar* punten der dubbelkromme doet kennen. In het voorbijgaan volgt hieruit dan weer, dat deze kromme vier punten gemeen moet hebben met de lijn in het oneindige van het vlak $x = x_1$. Ook dit is gemakkelijk te verifieeren. Wijl de coördinaten van een punt der dubbelkromme alleen oneindig kunnen worden als een der beide grootheden p, q oneindig is, en de betrekking tusschen deze grootheden dan eischt dat ze het beide zijn, stellen we naast $q = \infty$ tevens $p = q\lambda$. Hierdoor vinden we

$$\left.\begin{aligned} 28x &= q^6(5\lambda^6 - 10\lambda^4 - 6\lambda^2 + 4) \\ 4y &= q^7\lambda(5\lambda^4 - 14\lambda^2 + 6) \\ z &= q^8(5\lambda^4 - 12\lambda^2 + 3) \end{aligned}\right\}$$

en

$$3\lambda^4 - 10\lambda^2 + 6 = 0.$$

En nu geeft de laatste vergelijking vier waarden van λ en ieder dier waarden van λ een punt waarvoor y oneindig is ten

opzichte van x en z ten opzichte van y. Daar deze vergelijking in λ bikwadratisch is, liggen de gevonden punten twee aan twee symmetrisch en bezit de dubbelkromme twee parabolische takken, die de aangewezen oneindig ver gelegen lijn op de z-as aanraken.

Voor een groep der doorsneden zijn al de merkwaardige punten bestaanbaar. Zoo geeft de doorsnee met het vlak $x = OA$ (zie fig. 1) een kromme (fig. 2) met drie dubbelpunten op OZ, drie paar keerpunten en zes paar dubbelpunten symmetrisch ten opzichte van OZ. De bijgevoegde cijfers wijzen aan hoeveel wortels van de achtste-machtsvergelijking $f(u) = 0$ bestaanbaar zijn voor de met het punt overeenkomende waarden der coördinaten. Let men alleen op de keerpunten, dan zijn de vlakken $x = x_1$ door een of twee keerpunten der keerkromme vlakken van afscheiding. In verband met de eerste der drie vergelijkingen van de keerkromme volgt uit $u^5 - 10u^3 + 5u = 0$, dat deze grenzen door $x = 175 - 80\sqrt{5}$, $x = 0$ en $x = 175 + 80\sqrt{5}$ worden aangewezen. Zoo heeft men, wijl het passeeren van een keerpunt der keerkromme het aantal keerpunten der doorsnee met twee vermeerdert of vermindert,

voor	$-\infty < x < 175 - 80\sqrt{5}$	geen keerpunt,
	$175 - 80\sqrt{5} < x < 0$	vier keerpunten,
	$0 < x < 175 + 80\sqrt{5}$	zes keerpunten,
	$175 + 80\sqrt{5} < x < +\infty$	twee keerpunten.

Let men bovendien op de bestaanbaarheid der dubbelpunten, dan moet men de kromme in het vlak $y = 0$ (fig. 1) in de beschouwing opnemen.

Uit de symmetrie volgt, dat de dubbelkromme zich op het vlak $y = 0$ als een kromme van den achtsten graad projecteert en een punt, waarin zij dit vlak snijdt, noodzakelijk òf een dubbelpunt, òf een ruimtebuigpunt is, waar het osculatievlak vier opvolgende punten bevat en dus stationair is. In het laatste geval is dit snijpunt voor de projectie een keerpunt. Wijl de voorwaarde $y = 0$ zich splitst in $p = 0$, $q = 0$ en $p^2 = 2(q^2 - 7)$, hebben we deze onderstellingen achtereenvolgens na te gaan. Om niet te uitvoerig te worden, laten we dit onderzoek hier achterwege; alleen merken we op, dat de factor

$u^2 + pu + q^2$, die de dubbele wortels van $f(u) = 0$ levert, gemakkelijk doet zien, dat de bij $p = 0$ en $q = 0$ behoorende puntenparen met de paren (4, 7) en (5, 8) van fig. 1 samenvallen, terwijl de vier punten $p^2 = 2(q^2 - 7)$ onbestaanbaar zijn.

6. Aan het slot van no. 1 is opgemerkt, dat de reciprociteit van het oppervlak nog nader zou blijken bij het onderzoek der dubbelkromme. We zullen dit nu toelichten. Even als de dubbelkromme van den twintigsten graad zich splitst in een vlak deel van den vierden en een ruimtekromme van den zestienden graad, splitst het dubbel omschreven ontwikkelbaar oppervlak van de twintigste klasse zich in een cylinder van de vierde klasse met beschrijvende lijnen evenwijdig aan de y-as en een ontwikkelbaar oppervlak met een keerkromme van de zestiende klasse. We wijzen ten slotte kort aan, hoe de in het vlak $y = 0$ gedachte loodrechte doorsnee van den cylinder gevonden wordt.

De beschrijvende lijn

$$\left.\begin{aligned} u^8 - 28u^6 + 70u^4 + 28xu^2 + 8yu + z &= 0 \\ u^7 - 21u^5 + 35u^3 + 7xu^2 + y \qquad\quad &= 0 \end{aligned}\right\}$$

van het gegeven ontwikkelbaar oppervlak snijdt in een punt van het vlak $y = 0$ de beschrijvende lijn, die door omkeering van het teeken van u wordt verkregen. Dus geeft eliminatie van y voor het vlak, dat door deze twee lijnen gaat,

$$7u^8 - 140u^6 + 210u^4 + 28xu^2 - z = 0$$

of, als u^2 weer door v vervangen wordt,

$$7v^4 - 140v^3 + 210v^2 + 28xv - z = 0.$$

Dit voert tot het stelsel

$$x = -v(v^2 - 15v + 15), \quad z = -7v^2(3v^2 - 40v + 30),$$

dat bij onderzoek een rationale kromme van graad en klasse vier blijkt voor te stellen. De beide keerpunten van deze kromme zijn de projecties van de niet in het vlak $y = 0$ gelegen stationaire punten van het oorspronkelijk oppervlak. Want de beide voorwaarden $\frac{dx}{dv} = 0$, $\frac{dz}{dv} = 0$ loopen uit op de vergelijking $v^2 - 10v + 5 = 0$, die met $u^4 - 10u^2 + 5 = 0$ overeenstemt.

Vraagstuk XIX.

K 14 c. Een gegeven kubus door 12 zaagsneden in 27 stukken te verdeelen, waarvan een den vorm heeft van een regelmatig twaalfvlak, terwijl men uit 8 andere stukken een tweede regelmatig twaalfvlak kan samenstellen. Hoe verhouden zich de beide twaalfvlakken? Welken vorm hebben de overige 18 deelen?

(Dr. P. H. Schoute.)

Opgelost *door* J. A. Kerkhoven, Dr. P. H. Schoute *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* Dr. C. Stolp.

Bij een regelmatig twaalfvlak (fig. 3) kan men drie paar evenwijdige ribben (AB, B'A'), (CD, D'C'), (EF, F'E') zoo kiezen, dat elk paar de beide andere loodrecht kruist. De lijnen XX', YY', ZZ', die de middens van elk paar verbinden, snijden elkaar in het middelpunt O loodrecht; de vlakken door deze lijnen twee aan twee gebracht zijn symmetrievlakken van het twaalfvlak. De kubus, waarvoor XX', YY', ZZ' de lijnen zijn, die de middelpunten der overstaande zijvlakken verbinden, kan aan het twaalfvlak *omgeschreven* genoemd worden; in zijn oppervlak liggen de 6 aangewezen ribben en dus 12 van de 20 hoekpunten. De 8 overige hoekpunten van het twaalfvlak liggen paarsgewijs op de hoofddiagonalen van dezen kubus; zij vormen de hoekpunten van een tweeden kubus, die aan het twaalfvlak *ingeschreven* kan heeten. Wijl de 15 verbindingslijnen der middens van overstaande ribben 5 rechthoekige assenstelsels vormen, laat het twaalfvlak 5 omgeschreven en 5 ingeschreven kuben toe. De 40 hoekpunten der laatste (zie o.a. de noot op blz. 19 van Klein's „Vorlesungen über das Ikosaeder") bestaan uit de dubbel getelde hoekpunten van het twaalfvlak.

In fig. 4 is de projectie voorgesteld van het twaalfvlak op het grondvlak van den omgeschreven kubus. Van 4 vijfhoeken zijn de projecties rechte lijnen. Deze geven tevens de doorsneden aan van het grondvlak met een stelsel van vier zaagsneden loodrecht op het grondvlak. De andere twee viertallen zaagsneden zijn natuurlijk loodrecht op een paar opstaande zijvlakken. Met elkaar worden ze in fig. 5 aangeduid.

Is 2α de standhoek op de ribbe van het twaalfvlak, dan zijn

α en $90° - \alpha$ de hoeken, welke de zaagsneden loodrecht op het grondvlak van den omgeschreven kubus met de opstaande zijvlakken maken (fig. 4). Gelijk men weet, is

$$\alpha = \text{Bgtg}\,\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),\ 90° - \alpha = \text{Bgtg}\,\tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}).$$

In verband hiermede blijkt gemakkelijk, dat de ribbe PQ van den ingeschreven kubus het grootste stuk is van de in middelste en uiterste reden verdeelde ribbe AB′ van den omgeschreven kubus.

Denkt men zich alle zaagsneden naar den kant van het middelpunt over gelijke afstanden evenwijdig verschoven, dan zullen zij een kleiner regelmatig twaalfvlak insluiten. Men verkrijgt dan o.a. ook een stand, waarbij het stelsel van zaagsneden is als fig. 6 aangeeft. We beschouwen de met dezen stand overeenkomende verdeeling van den kubus wat nader met behulp van fig. 7, waar naast den kubus met het door de zaagsneden ingesloten twaalfvlak I de stukken II, III, IV afzonderlijk zijn voorgesteld.

De stukken II, die ten getale van acht voorkomen — en wel aan de hoeken van den kubus — vormen gezamenlijk een tweede regelmatig twaalfvlak. Dit blijkt onmiddellijk als we het afzonderlijk weergegeven stuk II vergelijken met het achtste deel van den kern, dat er in orientatie mee overeenkomt. Want de twee drietallen van zijvlakken van de twee drievlakkenhoeken 1′(GIK), P′(LTH), die het stuk II insluiten, zijn evenwijdig met de twee drietallen van zijvlakken der drievlakkenhoeken O(G′I′K′), P(CEA), terwijl bovendien de verbindingslijnen 1′P′ en OP langs een zelfde lijn, de inwendige diagonaal 1,1′ van den kubus, vallen. De lineaire verhouding m van het nieuwe twaalfvlak tot het centrale kan, in verband met de verplaatsbaarheid der zaagsneden, tusschen twee grenzen wisselen. Voor het grensgeval van de figuren 6 en 7 is $m = \overline{a_2a_4} : \overline{a_1''_3} = \text{tg}\,\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$; voor het grensgeval van fig. 5 is $m = \text{tg}\,(90° - \alpha) = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$. Wijl, zoo als aanstonds blijken zal, de verdeeling in 27 deelen het laatste geval uitsluit, hebben we dus

$$\tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) < m \leqq \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

en derhalve voor de verhouding m^3 der inhouden

$$-2 + \sqrt{5} < m^3 \leqq 2 + \sqrt{5}.$$

Zorgt men er voor, dat de zaagsneden zich niet verder uitstrekken dan voor het uitsnijden van het centrale twaalfvlak noodig is, dan zal (fig. 6) het eerste stel zaagsneden den kubus in 3, het tweede dit lichaam in 9, het derde het in 27 stukken verdeelen, waarvan er 9 de beide twaalfvlakken vormen. Van de 18 overige stukken hebben er 12 den vorm III en 6 den vorm IV; voor het grensgeval van fig. 5 valt elk der 6 stukken IV echter in 2 gelijke stukken uiteen, wijl de driehoek ME'F' nul wordt; dit grensgeval behoort dus eigenlijk bij een verdeeling in 33 stukken.

De 12 stukken III vertoonen 6 zijvlakken, 11 ribben en 7 hoekpunten; zij voldoen dus aan den regel van EULER. Met de 6 stukken IV, die 8 zijvlakken, 18 ribben en 10 hoekpunten bezitten, is dit echter niet het geval.

Vraagstuk XX.

D 2 b α. Voor $x = 1$ en $x = 2$ de som te bepalen van de reeks

$$\frac{x}{1^2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3^2} + \frac{1.2}{3.4}\frac{x^5}{5^2} - \frac{1.2.3}{4.5.6}\frac{x^7}{7^2} + \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8}\frac{x^9}{9^2} - \ldots\ldots$$

(DR. C. STOLP.)

Oplossing *van* DR. C. STOLP.

Wanneer men de bekende herleiding (zie o.a. *Wisk. Opg.* deel VI, no. 181)

$$\binom{2n}{n} = \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} \cdot 2^{2n}$$

op den algemeenen term u_n der reeks toepast, heeft men

$$u_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} : \binom{2n}{n} = (-1)^n \cdot \frac{2}{(2n+1)^2} \frac{2^{n/2}}{1^{n/2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

Daar verder

$$\frac{2^{n\,2}}{1^{n/2}} = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, dt$$

is, wordt

$$u_n = (-1)^n \frac{2}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x \sin t}{2}\right)^{2n+1} dt.$$

Vereenigt men nu alle termen onder een integraalteeken, dan wordt de reeks vervangen door

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x \sin t}{2} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{x \sin t}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x \sin t}{2}\right)^5 - \ldots\ldots\right] dt.$$

De som der reeks door $f(x)$ aanduidende, heeft men dus

$$f(x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{Bgtg} \frac{x \sin t}{2}\right) dt \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

In de „Lessen over de Hoogere Algebra" van LOBATTO—RAHUSEN vinden wij op bl. 401, form. (7), voor $y^2 < 1$

$$\tfrac{1}{2} \text{Bgtg} \frac{2y \sin t}{1-y^2} = y \sin t + \frac{y^3}{3} \sin 3t + \frac{y^5}{5} \sin 5t + \ldots\ldots$$

Worden beide leden dezer vergelijking na vermenigvuldiging met dt tusschen de grenzen $t = 0$ en $t = \frac{\pi}{2}$ geïntegreerd, dan komt in het tweede lid een bekende reeks, die het eerst door LANDEN is onderzocht en die wij door $\varphi(y)$ zullen aanduiden.

Wij hebben dan

$$\varphi(y) = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{Bgtg} \frac{2y \sin t}{1-y^2}\right) dt = \frac{y}{1^2} + \frac{y^3}{3^2} + \frac{y^5}{5^2} + \ldots\ldots \quad 2)$$

Deze uitkomst met 1) vergelijkende, zien wij dat, voor $\frac{x}{2} = \frac{2y}{1-y^2}$,

$$f(x) = 4\varphi(y)$$

wordt. Door eliminatie van y kan dit worden uitgedrukt in de vergelijking

$$f(x) = 4\varphi\left(\frac{-2+\sqrt{4+x^2}}{x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Nu is voor $x = 1$ en $x = 2$ het tweede lid van deze vergelijking bekend; LANDEN vindt (*Math. Mem.* Vol. I, blz. 116 en 117) de volgende uitkomsten

$$\varphi(-2+\sqrt{5}) = \frac{\pi^2}{24} + \tfrac{3}{4}\left[\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]^2 -$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right][\log(-2+\sqrt{5})],$$

$$\varphi(-1+\sqrt{2}) = \frac{\pi^2}{16} - \tfrac{1}{2}[\log(-1+\sqrt{2})]^2.$$

Verbetert men een fout in de laatste vergelijking en bedenkt men dat

$$-2+\sqrt{5} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3, \quad -1+\sqrt{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} \text{ is,}$$

dan wordt

$$\varphi(-2+\sqrt{5}) = \frac{\pi^2}{24} - \tfrac{3}{4}\left(\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

$$\varphi(-1+\sqrt{2}) = \frac{\pi^2}{16} - \tfrac{1}{4}\left(\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^2.$$

Door toepassing van 3) vindt men nu

$$f(1) = \frac{\pi^2}{6} - 3\left(\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad f(2) = \frac{\pi^2}{4} - \left(\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^2.$$

OPMERKINGEN. I. Ook $f(4)$ en $f(\infty)$ zijn bekend, als men de vergelijking 1) tot uitgangspunt kiest. Onze reeks verliest dan echter haar beteekenis.

II. Ofschoon in gewijzigden vorm, is de hier opgegeven reeks dezelfde als een der reeksen, welke behandeld zijn door Dr. W. KAPTEYN in het *N. A. v. Wisk.*, IIe reeks, deel III, blz. 225 (Sur deux séries qui représentent la même fonction dans une partie du plan).

Vraagstuk XXI.

E 5. De waarde te bepalen van de integraal

$$F(\alpha) \equiv \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{Bg tg}\,(\sin\alpha\cos\alpha\cos x\,\text{ctg}\,x)dx\,, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

(Dr. C. STOLP).

Opgelost *door* W. MANTEL, J. STEIN *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* W. MANTEL *en* J. STEIN.

De functie van x, Bg tg $(\sin a \cos a \cos x \,\text{ctg}\, x)$ is tusschen de grenzen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ eindig en doorloopend. Haar differentiaalquotient ten opzichte van a

$$\frac{\cos x\,\text{ctg}\,x\cos 2a}{1+\sin^2 a\cos^2 a\cos^2 x\,\text{ctg}^2 x}$$

bezit als functie van a dezelfde eigenschap. Wij mogen dus stellen:

$$\frac{dF(a)}{da} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x\,\text{ctg}\,x\cos 2a}{1+\sin^2 a\cos^2 a\cos^2 x\,\text{ctg}^2 x}\,dx =$$

$$= \cos 2a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 x\sin x\,dx}{1-\cos^2 x+\sin^2 a\cos^2 a\cos^4 x} =$$

$$= \cos 2a \int_0^1 \frac{y^2 dy}{(1-y^2\sin^2 a)(1-y^2\cos^2 a)}, \text{ als } \cos x = y \text{ is.}$$

Of

$$\frac{dF(a)}{da} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1-y\cos a}+\frac{1}{1+y\cos a}-\frac{1}{1-y\sin a}-\frac{1}{1+y\sin a}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2\cos a}\log\frac{1+\cos a}{1-\cos a}+\frac{1}{2\sin a}\log\frac{1-\sin a}{1+\sin a} =$$

$$= \frac{1}{\cos a}\log\text{ctg}\,\tfrac{1}{2}a+\frac{1}{\sin a}\log\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right).$$

Derhalve is

$$\frac{dF(a)}{da} = -\log\cot\tfrac{1}{2}a\,\frac{d}{da}\left\{\log\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right\} -$$

$$-\log\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\frac{d}{da}\left\{\log\cot\tfrac{1}{2}a\right\}$$

en $$F(a) = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) + C.$$

Voor $a = 0$ is $F(a) = 0$, zooals uit den integraalvorm blijkt. Om te bepalen, wat het tweede lid wordt, geven wij aan a een zeer kleine waarde δ. Dan is

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}\right) = \log(\tfrac{1}{2}\delta + A\delta^2 + \ldots) \log \frac{1 - \frac{\delta}{2} - A\delta^2 + \ldots}{1 + \frac{\delta}{2} + A\delta^2 + \ldots} =$$

$$= \log(\tfrac{1}{2}\delta + \ldots) . \log(1 - \delta + \ldots) = -(\delta + \ldots) . \log(\tfrac{1}{2}\delta + \ldots).$$

Dit nadert met δ tot nul. Dus is $C = 0$, en

$$F(a) = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right).$$

Oplossing *van* Dr. C. Stolp.

Gebruik makende van

$$\sin a \cos a = \frac{1}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{tg} a} \quad \text{en} \quad \cos x \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x},$$

kan men de functie onder het integraalteeken vervangen door

$$\operatorname{bg} \operatorname{tg}\left(\frac{1 - \operatorname{ctg} a \sin x \,.\, \operatorname{tg} a \sin x}{\operatorname{ctg} a \sin x + \operatorname{tg} a \sin x}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{bg} \operatorname{tg}(\operatorname{ctg} a \sin x) - \operatorname{bg} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} a \sin x).$$

Voert men nu een nieuwe functie $f(a)$ in door de vergelijking

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{bg} \operatorname{tg}(\cot a \sin x) dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1),$$

dan wordt

$$F(a) = \frac{\pi^2}{4} - f(a) - f\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

en

$$dF(a) = -f'(a)da + f'\left(\frac{\pi}{2} - a\right) da \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

De differentiatie van 1) geeft

$$f'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x\, dx}{1 - \cos^2 a \cos^2 x} = \frac{1}{\cos a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos a \cos x)}{1 - (\cos a \cos x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2 \cos a} \log \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a},$$

waaruit verder volgt

$$f'(a) = \frac{\log \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{\cos a} \text{ en } f'\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)}{\sin a}.$$

Brengt men deze waarden over in 2), daarbij bedenkende, dat

$$-\frac{da}{\cos a} = d \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right), \quad \frac{da}{\sin a} = d \log \operatorname{tg} \frac{a}{2} \text{ is,}$$

dan krijgt men

$$dF(a) = \log \operatorname{tg} \frac{a}{2}\, d \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) + \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) d \log \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

In aanmerking nemende, dat $F(0) = 0$ is, vindt men dus

$$F(a) = \log \operatorname{tg} \frac{a}{2} \,.\, \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right).$$

Vraagstuk XXII.

L[1] 7 d. Men beschouwt twee willekeurige punten eener ellips als middelpunten van cirkels, die door een zelfde brandpunt gaan. Aan te toonen, dat het uitwendige gelijkvormigheidspunt dezer cirkels op een der richtlijnen ligt. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, K. BES, J. VAN OSS, DR. A. J. A. PRANGE, J. STEIN, DR. C. STOLP, J. A. VOLLGRAFF *en* DR. J. DE VRIES.

Oplossingen.

I. Laten M en M_1 twee willekeurige punten van een ellips, een parabool of van denzelfden tak eener hyperbool zijn, waar-

van F een brandpunt en g de bijbehoorende richtlijn is. Zij P het snijpunt van MM_1 en g, laten N en N_1 de projecties zijn van M en M_1 op g, dan is

$$MN : M_1N_1 = MF : M_1F \text{ en } MN : M_1N_1 = MP : M_1P,$$

bijgevolg

$$MP : M_1P = MF : M_1F.$$

P is dus het uitwendige gelijkvormigheidspunt van de cirkels die M en M_1 tot middelpunten en MF en M_1F tot stralen hebben; m. a. w.:

Het uitwendige gelijkvormigheidspunt der cirkels, die twee willekeurige punten van een ellips, een parabool of van denzelfden tak eener hyperbool tot middelpunten hebben en door een zelfde brandpunt gaan, ligt op de bij dit brandpunt behoorende richtlijn.

Voor twee punten eener hyperbool, op verschillende takken gelegen, moet het uitwendige gelijkvormigheidspunt worden vervangen door het inwendige.

(T. J. A.; K. B.; A. J. A. P.; C. S.).

II. Zij F het genoemde brandpunt, A en B de bedoelde punten, I en U het in- en het uitwendige gelijkvormigheidspunt. De lijnen FI en FU deelen achtereenvolgens hoek AFB en zijn supplement middendoor; zij staan dus loodrecht op elkaar. Daar de lijn IF door een brandpunt gaat, ligt haar pool ten opzichte van de ellips op de overeenstemmende richtlijn en op de loodlijn FU. Daar verder U harmonisch is gelegen ten opzichte van A, I en B, ligt die pool ook op de poollijn van I, welke door U gaat. Derhalve ligt die pool in U en dus op de richtlijn. (J. S.).

III. De cirkel, welke het punt $P(x, y)$ der ellips tot middelpunt en PF tot straal heeft, is de cyclographische afbeelding van het puntenpaar, waarvoor men heeft

$$z^2 = (x - c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

De meetkundige plaats van die beeldpunten is het vlakkenpaar, dat door $a^2z^2 = (a^2 - b^2)x^2 - 2a^2cx + a^2(b^2 + c^2)$ of ook door $az = \pm(cx - a^2)$ wordt aangewezen, en dat tot gemeenschappelijken doorgang heeft de richtlijn $x = a^2 : c$. De cirkels

(PF) vormen dus een „planair" stelsel, d. w. z. ze hebben paarsgewijs een gelijkvormigheidspunt op die richtlijn. (Omtrent FIEDLER's Cyclographie kan men behalve het onder dien titel 1882 bij Teubner verschenen boek ook een uitvoerige in *Acta Math.* 5 geplaatste verhandeling raadplegen.) (J. D. V.).

Vraagstuk XXIII.

M^3 5 c γ. Door elk punt P van een kubische ruimtekromme, welke de beide onbestaanbare cirkelpunten van een vlak V bevat, brengt men in den kwadratischen kegel, die de kromme uit P projecteert, het cyclische vlak aan, dat niet evenwijdig is met V. Welk ontwikkelbaar oppervlak wordt door die cyclische vlakken omhuld?

(Dr. P. ZEEMAN GZ.)

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN GZ.

1. De gestelde vraag vervangen wij door de volgende, meer algemeene.

Zij k^3 een willekeurige kubische ruimtekromme, welke door een vlak W in drie punten A, B en C wordt gesneden; van deze punten kunnen twee, bijv. A en B, imaginair zijn. In W zij een kegelsnede φ gegeven, die door A en B, doch niet door C gaat. Uit een van haar punten P wordt k^3 op W geprojecteerd; de projectie zal eene kegelsnede ψ_p zijn, die met φ, behalve A en B, nog twee punten A_1 en B_1 gemeen heeft. Welk ontwikkelbaar oppervlak wordt omhuld door de vlakken PA_1B_1 als het punt P de kromme k^3 doorloopt?

Wij bepalen hoeveel van die vlakken door een willekeurig punt M van φ gaan. Als het vlak PA_1B_1 door M gaat, dan ligt M op ψ_p en is dus PM een koorde van k^3. Nu gaat door M slechts één koorde van k^3, die dan met deze kromme twee punten P_1 en P_2 gemeen heeft. De projecties van k^3 uit P_1 of P_2 op W snijden derhalve φ, behalve in A, B en M elk nog in een punt N_1 of N_2. De beide vlakken P_1MN_1 en P_2MN_2 zijn dan twee vlakken der omhullende die door M gaan.

Doch bovendien gaat door M nog het vlak W, dat ook een der vlakken van die omhullende is. Immers neemt men het punt P in C, dan zal de projectie van k^3 op W bestaan uit de beide rechten CA en CB; snijden deze φ nog in A_2 en B_2,

dan maakt ook het vlak CA_2B_2, d. i. W, deel uit van het omhulde vlakkenstelsel.

Door elk punt van de kegelsnede φ gaan derhalve drie der bedoelde vlakken. Zij omhullen een ontwikkelbaar oppervlak van de derde klasse, vormen dus de osculatievlakken eener tweede kubische ruimtekromme k_1^3, welke ook het gegeven vlak W tot osculatievlak heeft.

Elk osculatievlak eener kubische ruimtekromme wordt door de overige volgens rechten gesneden, die een kegelsnede omhullen. Is nu PA_1B_1 een osculatievlak van k_1^3 (A_1 en B_1 zijn de snijpunten van dit vlak met φ), dan gaan, zooals men onmiddellijk inziet, door elk der rechten PA_1 en PB_1 twee osculatievlakken van k_1^3; derhalve zijn PA_1 en PB_1 twee raaklijnen van de in het osculatievlak PA_1B_1 der kromme k_1^3 gelegen kegelsnede.

Elk punt P van k_1^3 is dus snijpunt van de beide raaklijnen der in het vlak PA_1B_1 gelegen kegelsnede, die door de snijpunten A_1 en B_1 van dit vlak met φ gaan.

2. Wij nemen nu de bovengenoemde kubische ruimtekromme, die door de beide imaginaire cirkelpunten van een vlak V gaat, laten het vlak W samenvallen met het vlak in 't oneindige en de kegelsnede φ met den imaginairen cirkel in het oneindige, dan wordt het vlak PA_1B_1 van 't algemeene geval het door P gaande tweede cyclische vlak van den kwadratischen kegel, die de kromme uit P projecteert.

Men verkrijgt dan deze eigenschap:

Brengt men door elk punt P van een kubische ruimtekromme, die de imaginaire cirkelpunten van een vlak V bevat, in den kwadratischen kegel, die de kromme uit P projecteert, het cyclische vlak aan, dat niet evenwijdig is met V, dan osculeeren deze cyclische vlakken een tweede cyclische ruimtekromme.

Wijl het vlak in het oneindige osculatievlak is, zal de nieuwe kromme een kubische parabool zijn. Elk punt P van de oorspronkelijke kromme is het snijpunt van twee door den oneindig ver gelegen imaginairen cirkel gesneden raaklijnen der kegelsnede die in het door P gaande osculatievlak der kubische parabool door de overige osculatievlakken omhuld wordt. Derhalve zijn de punten P de brandpunten der parabolen, volgens welke het ontwikkelbaar oppervlak der ruimteparabool door haar osculatievlakken wordt gesneden.

Vraagstuk XXIV.

K 8 f. Op de zijden van een vierhoek ABCD beschrijft men buitenwaarts de vierkanten ABEF, BCGH, CDJK, DALM. Zijn O_1, O_2, O_3, O_4 de middelpunten der vierkanten, welke buitenwaarts beschreven zijn op EH, GK, JM, LF als zijden, dan vraagt men te bewijzen, dat

a) van den vierhoek $O_1O_2O_3O_4$ de diagonalen even groot zijn en loodrecht op elkaar staan, wanneer dit het geval is met den vierhoek ABCD;

b) als Z het zwaartepunt van driehoek $O_1O_3O_4$ en N het midden van O_4Z is, de rechte NA loodrecht staat op O_1O_3 en gelijk is aan $\frac{1}{6}O_1O_3$. (Dr. H. VAN AUBEL).

Opgelost *door* Dr. H. VAN AUBEL *en* Mevr. A. G. KERKHOVEN-WIJTHOFF.

Oplossing *van* Dr. H. VAN AUBEL.

Uit de equipollenties

$$BE = iBA, \qquad AF = iBA$$

vindt men

$$E = iA + (1 - i)B, \qquad F = (1 + i)A - iB.$$

Evenzoo is

$$G = iB + (1 - i)C, \qquad H = (1 + i)B - iC,$$
$$J = iC + (1 - i)D, \qquad K = (1 + i)C - iD,$$
$$L = iD + (1 - i)A, \qquad M = (1 + i)D - iA.$$

Verder is

$$HO_1 = \frac{1 + i}{2} HE,$$

dus

$$O_1 = \frac{1 - i}{2} H + \frac{1 + i}{2} E.$$

Brengt men hierin de waarden van H en E over, dan komt er

$$O_1 = -\frac{1 - i}{2} A + 2B - \frac{1 + i}{2} C. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Evenzoo is

$$O_2 = -\frac{1-i}{2}B + 2C - \frac{1+i}{2}D, \quad \ldots\ldots\ldots 2)$$

$$O_3 = -\frac{1-i}{2}C + 2D - \frac{1+i}{2}A, \quad \ldots\ldots 3)$$

$$O_4 = -\frac{1-i}{2}D + 2A - \frac{1+i}{2}B. \quad \ldots\ldots\ldots 4)$$

a) Trekt men nu (1) van (3) en (2) van (4) af, dan komt er

$$O_1O_3 = -iA - 2B + iC + 2D = iAC + 2BD,$$
$$O_2O_4 = 2A - iB - 2C + iD = -2AC + iBD.$$

De voorwaarde dat de diagonalen van $O_1O_2O_3O_4$ even groot zijn en loodrecht op elkaar staan, wordt uitgedrukt door

$$O_2O_4 = i\,O_1O_3$$

of door

$$-2AC + iBD = i(iAC + 2BD).$$

Hieruit leidt men af:

$$BD = iAC;$$

dus moeten de diagonalen van ABCD even groot zijn en loodrecht op elkaar staan.

b) Door eliminatie van D uit (3) en (4) verkrijgt men:

$$\frac{1-i}{2}O_3 + 2O_4 = \frac{7}{2}A - (1+i)B + \frac{i}{2}C.$$

Elimineert men nu C uit deze equipollentie en (1), zoo verdwijnt ook B en men vindt

$$iO_1 + O_3 + 2(1+i)O_4 = 3(1+i)A.$$

Dus is

$$A = \frac{(1+i)O_1 + (1-i)O_3 + 4O_4}{6}.$$

Is nu Z het zwaartepunt van driehoek $O_1O_3O_4$ en N het midden van O_4Z, zoo heeft men

$$Z = \frac{O_1 + O_3 + O_4}{3}$$

en

$$N = \frac{O_4 + Z}{2} = \frac{O_1 + O_3 + 4O_4}{6}.$$

Bijgevolg is

$$A = N - \frac{i}{6}(O_3 - O_1)$$

en

$$NA = -\frac{i}{6} O_1 O_3.$$

Hieruit blijkt dat *NA loodrecht staat op $O_1 O_3$ en gelijk is aan $\frac{1}{6} O_1 O_3$.*

Vraagstuk XXV.

L[1] 16 a. Uit een punt der bij driehoek ABC behoorende ellips van STEINER trekt men, evenwijdig met de medianen AD, BE, CF, rechten, die de zijden BC, CA, AB achtereenvolgens in A_1, B_2, C_3, in A_3, B_1, C_2, in A_2, B_3, C_1 snijden. Te bewijzen, dat de punten A_1, B_1, C_1 in een rechte liggen, dat dit ook het geval is met A_2, B_2, C_2 en met A_3, B_3, C_3, en dat men heeft

$$A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2 = A_3B_3 : B_3C_3.$$

(Dr. H. VAN AUBEL).

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. H. VAN AUBEL, Dr. A. J. A. PRANGE *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Wanneer in barycentrische coördinaten P (ξ, η, ζ) een punt van de ellips van STEINER voorstelt, is

$$\eta\zeta + \zeta\xi + \xi\eta = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

De medianen AD, BE, CF snijden de oneindig ver gelegen rechte in de punten

$$D'(-2, 1, 1), \qquad E'(1, -2, 1), \qquad F'(1, 1, -2).$$

De rechten, welke deze punten met P verbinden, hebben tot vergelijkingen

$$(\eta - \zeta)x - (\xi + 2\zeta)y + (\xi + 2\eta)z = 0, \ldots (PD')$$
$$(\eta + 2\zeta)x + (\zeta - \xi)y - (\eta + 2\xi)z = 0, \ldots (PE')$$
$$-(\zeta + 2\eta)x + (\zeta + 2\xi)y + (\xi - \eta)z = 0. \ldots (PF')$$

De snijpunten dezer lijnen met de coördinaatassen zijn

$$\left.\begin{array}{lll} A_1(0, \xi+2\eta, \xi+2\zeta), & B_2(\xi+2\eta, 0, \zeta-\eta), & C_3(\xi+2\zeta, \eta-\zeta, 0), \\ A_3(0, \eta+2\xi, \zeta-\xi), & B_1(\eta+2\xi, 0, \eta+2\zeta), & C_2(\xi-\zeta, \eta+2\zeta, 0), \\ A_2(0, \eta-\xi, \zeta+2\xi), & B_3(\xi-\eta, 0, \zeta+2\eta), & C_1(\zeta+2\xi, \zeta+2\eta, 0) \end{array}\right\} \quad 2)$$

Zullen A_1, B_1, C_1 op een rechte lijn liggen, en zal dat ook het geval zijn met A_2, B_2, C_2 en A_3, B_3 en C_3, dan moeten de drie determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & \xi+2\eta & \xi+2\zeta \\ \eta+2\xi & 0 & \eta+2\zeta \\ \zeta+2\xi & \zeta+2\eta & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \eta-\xi & \zeta+2\xi \\ \xi+2\eta & 0 & \zeta-\eta \\ \xi-\zeta & \eta+2\zeta & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \eta+2\xi & \zeta-\xi \\ \xi-\eta & 0 & \zeta+2\eta \\ \xi+2\zeta & \eta-\zeta & 0 \end{vmatrix}$$

nul zijn.

Om dit aan te toonen, telle men twee kolommen bij de derde op. Men krijgt dan een kolom, die deelbaar is door $\xi+\eta+\zeta$. Na afzondering van dezen factor wordt de verdere herleiding vrij eenvoudig en zal men voor den eersten determinant het *zes*voud, voor elk der beide overige het *drie*voud van het product

$$(\xi+\eta+\zeta)\,(\eta\zeta+\zeta\xi+\xi\eta)$$

vinden, hetwelk blijkens 1) een factor nul bezit.

Zijn $A_n(0, y_a, z_a)$, $C_n(x_c, y_c, 0)$ twee punten op BC en AB, dan is:

$$CA_n : BA_n : BC = y_a : z_a : (y_a + z_a),$$
$$BC_n : AC_n : AB = x_c : y_c : (x_c + y_c).$$

Is nu B_n het snijpunt van AC en A_nC_n, en beschouwen wij AC als een transversaal in drieheek A_nBC_n, dan is volgens de stelling van MENELAUS

$$\frac{A_n B_n}{C_n B_n} \times \frac{y_a + z_a}{y_a} \times \frac{y_c}{x_c + y_c} = -1.$$

In het bijzonder is voor de punten van het stel 2)

$$y_a + z_a = 2(\xi+\eta+\zeta) \text{ en } x_c + y_c = \xi+\eta+\zeta.$$

Hier heeft men dus eenvoudiger

$$A_n B_n : B_n C_n = y_a : 2y_c.$$

Voor n achtereenvolgens 1, 2 en 3 nemende krijgt men

$$A_1B_1 : B_1C_1 = (\xi + 2\eta) : 2(\zeta + 2\eta),$$
$$A_2B_2 : B_2C_2 = (\eta - \xi) : 2(\eta + 2\zeta),$$
$$A_3B_3 : B_3C_3 = (\eta + 2\xi) : 2(\eta - \zeta).$$

Volgens 1) heeft men nu

$$(\xi + 2\eta) : (\zeta + 2\eta) = -\xi : \zeta,$$
$$(\eta - \xi) : (\eta + 2\zeta) = -\xi : \zeta,$$
$$(\eta + 2\xi) : (\eta - \zeta) = -\xi : \zeta.$$

Derhalve

$$A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2 = A_3B_3 : B_3C_3.$$

Meetkundige oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Wij kunnen driehoek ABC en de ellips van STEINER beschouwen als de orthogonale projecties van een gelijkzijdigen driehoek abc met zijn ombeschreven cirkel.

Laat P de projectie zijn van een op den cirkelboog bc gelegen punt p. Is nu ad loodrecht op bc en pa_1 evenwijdig met ad, dan heeft men pa_1 loodrecht op bc. Evenzoo zijn pb_1 en pc_1 loodrecht op ac en ab.

De punten a_1, b_1, c_1 liggen nu volgens de stelling van WALLACE-SIMSON in een rechte.

Daar hoek a_1pa_2 blijkbaar 60° is, heeft men $pa_2 = 2\,pa_1$. Evenzoo is $pb_2 = 2\,pb_1$ en $pc_2 = 2\,pc_1$.

Wordt de driehoek b_1pc_1 om p door een hoek van 60° gedraaid, terwijl men alle lijnen verdubbelt, dan komen de punten b_1, a_1, c_1 achtereenvolgens in b_2, a_2, c_2. Hieruit blijkt, dat ook de punten b_2, a_2, c_2 in een rechte liggen.

Door een wenteling van b_1pc_1 in tegengestelden zin toont men aan, dat de punten b_3, a_3, c_3 door een rechte worden verbonden.

Verder volgt uit de gelijkvormigheid der driehoeken b_1c_1p, b_2c_2p en b_3c_3p terstond

$$a_1b_1 : b_1c_1 = a_2b_2 : b_2c_2 = a_3b_3 : b_3c_3.$$

Door de gevonden uitkomsten over te brengen op den driehoek ABC en de bijbehoorende ellips van STEINER, vindt men de bovengenoemde eigenschappen.

Vraagstuk XXVI.

M³ 6 g. Een ruimtekromme is gegeven door de vergelijkingen

$$x = a \cos\theta + 2r \cos^3\theta, \quad z = 2r \sin\theta \cos\theta,$$

waar θ den hoek voorstelt, dien het vlak door OZ en een punt der kromme met het vlak XOZ maakt. Onderzoek de projectie der kromme op het vlak XOY, en bepaal een kubisch oppervlak, dat haar bevat. (J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL en Dr. J. DE VRIES.

Oplossing.

De bedoelde kromme wordt voorgesteld door

$$x = a \cos\theta + 2r \cos^3\theta,$$
$$y = a \sin\theta + 2r \sin\theta \cos^2\theta,$$
$$z = 2r \sin\theta \cos\theta.$$

Voert men $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta = t$ als nieuwen parameter in, zoo blijkt gemakkelijk, dat in een willekeurig vlak zes punten liggen; het is dus een ruimtekromme van den zesden graad.

Uit

$$x \sin\theta = y \cos\theta$$

en

$$z = 2r \sin\theta \cos\theta$$

leidt men af

$$xz = 2ry \cos^2\theta \text{ en } yz = 2rx \sin^2\theta.$$

Hieruit θ elimineerende, vindt men

$$(x^2 + y^2)\, z = 2rxy.$$

Dit kubische oppervlak is de cylindroïde.

Stelt men $x \sec\theta = \rho = \sqrt{x^2+y^2}$, dan levert de eerste vergelijking

$$\rho = a + 2r \frac{x^2}{\rho^2},$$

of

$$(x^2 + y^2)^3 = [(a + 2r)\, x^2 + ay^2]^2.$$

De projectie der ruimtekromme op XOY is dus een kromme van den zesden graad, die symmetrisch ligt t. o. v. de assen OX, OY.

Uit

$$\rho = a + 2r \cos^2 \theta$$

blijkt, dat ze in O een viervoudig punt heeft, waarvan de raaklijnen aangewezen worden door

$$\cos^2 \theta = - a : 2r.$$

Vraagstuk XXVII.

L² 17 d. Gegeven zijn een kwadratisch oppervlak F^2 en een daarbuiten gelegen punt P. Men vraagt een kwadratisch kegelvlak K^2, waarvan P de top is, zoo aan te nemen, dat het poolvlak π van P ten opzichte van F^2 door K^2 wordt gesneden volgens een parabool, die dubbel raakt aan de doorsnede van π met F^2, terwijl de polen der raakvlakken van K^2 ten opzichte van F^2 een cirkel vormen. (J. CARDINAAL).

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Zij S de doorsnede van π en F^2, O het middelpunt van S. Wij nemen de assen van S tot X-as en Y-as, de rechte OP tot Z-as, en stellen $OP = h$.

Daar π het poolvlak van P ten opzichte van F^2 is, heeft de vergelijking van dit oppervlak den vorm

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2\,Ix - Ih = 0. \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Voor een parabool R, die de kegelsnede S,

$$Ax^2 + By^2 - Ih = 0, \quad z = 0, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

dubbel aanraakt, vinden wij dan

$$(Am^2 + Bl^2)(Ax^2 + By^2 - Ih) - AB\,(lx + my + n)^2 = 0 \ldots 3)$$

Verder voor het poolvlak ϕ van $Q(x_0, y_0, z_0)$ met betrekking tot F^2:

$$Ax_0x + By_0y + Cz_0z + I\,(z + z_0) - Ih = 0 \ldots . \quad 4)$$

Zal ϕ door P $(0, 0, h)$ gaan, dan moet voldaan worden aan $z_0\,(Ch + I) = 0$. Was $Ch + I = 0$, dan zou F^2 tot vergelijking hebben $Ax^2 + By^2 + C\,(z - h)^2 = 0$, dus een kegelvlak zijn met P tot top; dit strijdt tegen de opgaaf. Men heeft dus $z_0 = 0$ té stellen.

Voor de doorsnede van π en ϕ is dus

$$Ax_0x + By_0y - Ih = 0. \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

Hieruit lossen wij y op en substitueeren de gevonden uitdrukking in 3). Na ontwikkeling vinden wij

$$A^2(lx_0 + my_0)^2 x^2 + 2\,Ax\{ - Ihl\,(lx_0 + my_0) + ny_0\,(Amx_0 - Bly_0)\}$$
$$+ I^2h^2l^2 - ABn^2y^2_0 - Ih\,(Am^2 + Bl^2)\,y_0^2 - 2\,AImnhy_0 = 0.$$

Deze vergelijking moet twee gelijke waarden voor x opleveren, daar de parabool R door de rechte (π, ϕ) moet geraakt worden.

De hiervoor te vervullen voorwaarde levert na ontwikkeling en deeling door $(Am^2 + Bl^2)\,y_0^2$,

$$Ih(lx_0 + my_0 + n)^2 + n^2\,(Ax_0^2 + By_0^2 - Ih) = 0 \quad . \; . \; . \quad 6)$$

Deze vergelijking stelt een cirkel voor, wanneer men heeft

$$An^2 + Ihl^2 = Bn^2 + Ihm^2 \text{ en } Ihlm = 0.$$

Voor $l = 0$, $(A - B)n^2 = Ihm^2$ wordt de vergelijking van het kegelvlak K^2

$$(A - B)\,Ahx^2 \pm 2\,By\,(z - h)\sqrt{Ih(A - B)} - AI\,(z - h)^2 = 0,$$

terwijl 6) overgaat in

$$A(x^2 + y^2) \pm 2y\sqrt{Ih(A - B)} = 0,$$

en voor $A > B$ twee gelijke cirkels voorstelt, die elkaar in O uitwendig raken en OX tot gemeenschappelijke raaklijn hebben.

Neemt men $m = 0$, $(B - A)n^2 = Ihl^2$, dan vindt men voor K^2

$$(B - A)\,Bhy^2 \pm 2\,Ax(z - h)\sqrt{Ih(B - A)} - BI(z - h)^2 = 0.$$

Voor $B > A$ wijst

$$B(x^2 + y^2) \pm 2\,x\sqrt{Ih(B - A)}$$

dan twee gelijke cirkels aan, die in O door OY worden aangeraakt.

Meetkundige oplossing *van* J. CARDINAAL.

Zij S de doorsnede van F^2 met π; zij R de gevraagde parabool. Wanneer de meetkundige plaats der polen van de raaklijnen van R ten opzichte van S een door twee bepaalde punten A en B gaande kegelsnede is, dan raakt R aan twee bepaalde raaklijnen. In het gegeven voorbeeld zijn A en B de cirkel-

punten in het oneindige; alzoo kan men wel is waar de raaklijnen niet construeeren, maar toch wel de straleninvolutie bepalen, waarvan de imaginaire dubbelstralen in de plaats komen van die raaklijnen. Zij deze straleninvolutie (I).

Hieruit volgt deze oplossing: Verbind P met het middelpunt M van F^2 en construeer door MP als as een vlakkenbundel, die het vlak π volgens de bovenomschreven straleninvolutie (I) snijdt. Het vraagstuk wordt nu herleid tot het volgende:

Een parabool te construeeren, die twee gegeven rechten (welke hier toegevoegd imaginair zijn) tot raaklijnen heeft en tevens een gegeven kegelsnede dubbel raakt. Dit is weer een bijzonder geval van het vraagstuk: Een kegelsnede construeeren, die een gegeven kegelsnede dubbel raakt en tevens drie gegeven rechten tot raaklijnen heeft.

Van dit laatste vraagstuk mag de oplossing bekend ondersteld worden.

Men zal in dit geval twee bestaanbare oplossingen verkrijgen, hetgeen met de vorige stelkundige oplossing overeenstemt.

Vraagstuk XXVIII.

O 6 a α. Men vraagt aan te toonen, dat het lijnelement van een omwentelingsoppervlak met totale kromming $-\frac{1}{a^2}$ steeds kan geschreven worden in den vorm

$$ds^2 = du^2 + (k_1 e^{\frac{u}{a}} + k_2 e^{-\frac{u}{a}})^2 dv^2.$$

(Dr. W. KAPTEIJN).

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEIJN.

Voor het lijnelement van elk omwentelingsoppervlak geldt de betrekking

$$ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2.$$

Stellen R en R′ de hoofdkromtestralen voor, dan is, volgens een formule van CODAZZI,

$$\frac{f(u)}{RR'} = -\frac{d^2 f}{du^2}.$$

(Zie DARBOUX, Leçons II, p. 385).

Is nu $RR' = -a^2$, dan wordt

$$\frac{d^2f}{du^2} = \frac{1}{a^2} f(u),$$

dus

$$f(u) = k_1 e^{\frac{u}{a}} + k_2 e^{-\frac{u}{a}}.$$

OPMERKING. Voor $k_2 = o$ vindt men de oppervlakken van aperiodisch type (KLEIN).

Stelt men $k_1 > o$, $k_2 < o$, dan verkrijgt men de oppervlakken van het conische type.

Voor $k_1 > o$, $k_2 > o$ vindt men het ringvormige type.

Vraagstuk XXIX.

M³ 5 a. Men beschouwt op de kubische ruimtekromme R^3 twee drietallen van punten A_1, A_2, A_3 en B_1, B_2, B_3. Als er drie raakvlakken van R^3 zijn, die haar in B_1, B_2, B_3 snijden en met elkaar een rechte van het vlak $A_1A_2A_3$ gemeen hebben, dan zijn er ook drie andere raakvlakken, die R^3 in A_1, A_2, A_3 snijden en elkaar ontmoeten volgens een rechte van het vlak $B_1B_2B_3$. Men vraagt dit te bewijzen. (Dr. J. C. KLUYVER).

Oplossing *van* Dr. J. C. KLUYVER.

De coördinaten van een punt der R^3 kunnen rationaal worden uitgedrukt in een parameter. Heeft deze parameter in A_k de waarde a_k, in B_k de waarde b_k, dan behooren, volgens de onderstelling, de vier kubische vormen

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \text{ en } (x - b_k)(x - x_k)^3$$

tot een involutie.

Uit

$$\lambda(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \equiv \mu(x - b_1)(x - x_1)^2 - \nu(x - b_2)(x - x_2)^2$$

vindt men nu, door achtereenvolgens te stellen $x = a_1, a_2, a_3$,

$$\sqrt{\frac{\nu}{\mu}} = \frac{a_1 - x_1}{a_1 - x_2}\sqrt{\frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_2}} = \frac{a_2 - x_1}{a_2 - x_2}\sqrt{\frac{a_2 - b_1}{a_2 - b_2}} = \frac{a_3 - x_1}{a_3 - x_2}\sqrt{\frac{a_3 - b_1}{a_3 - b_2}},$$

waar de argumenten der wortelgrootheden onbekend zijn.

Hieruit volgt

$$(a_2 - a_3)(a_1 - x_1)\sqrt{\frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_2}} + (a_3 - a_1)(a_2 - x_1)\sqrt{\frac{a_2 - b_1}{a_2 - b_2}} +$$

$$+ (a_1 - a_2)(a_3 - x_1)\sqrt{\frac{a_3 - b_1}{a_3 - b_2}} = 0.$$

Men heeft dus

$$x_1 = \frac{a_1(a_2 - a_3)\sqrt{\frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_2}} + a_2(a_3 - a_1)\sqrt{\frac{a_2 - b_1}{a_2 - b_2}} + a_3(a_1 - a_2)\sqrt{\frac{a_3 - b_1}{a_3 - b_2}}}{(a_2 - a_3)\sqrt{\frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_2}} + (a_3 - a_1)\sqrt{\frac{a_2 - b_1}{a_2 - b_2}} + (a_1 - a_2)\sqrt{\frac{a_3 - b_1}{a_3 - b_2}}}.$$

Door verwisseling van b_2 met b_3 vindt men een tweede uitdrukking voor x_1. Tusschen de zes parameterwaarden a_k, b_k bestaat bijgevolg de betrekking

$$\frac{a_1(a_2 - a_3)\sqrt{\frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_2}} + a_2(a_3 - a_1)\sqrt{\frac{a_2 - b_1}{a_2 - b_2}} + a_3(a_1 - a_2)\sqrt{\frac{a_3 - b_1}{a_3 - b_2}}}{a_1(a_2 - a_3)\sqrt{\frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_3}} + a_2(a_3 - a_1)\sqrt{\frac{a_2 - b_1}{a_2 - b_3}} + a_3(a_1 - a_2)\sqrt{\frac{a_3 - b_1}{a_3 - b_3}}} =$$

$$= \frac{(a_2 - a_3)\sqrt{\frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_2}} + (a_3 - a_1)\sqrt{\frac{a_2 - b_1}{a_2 - b_2}} + (a_1 - a_2)\sqrt{\frac{a_3 - b_1}{a_3 - b_2}}}{(a_2 - a_3)\sqrt{\frac{a_1 - b_1}{a_1 - b_3}} + (a_3 - a_1)\sqrt{\frac{a_2 - b_1}{a_2 - b_3}} + (a_1 - a_2)\sqrt{\frac{a_3 - b_1}{a_3 - b_3}}}.$$

Door verdrijving der breuken en deeling door

$$(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)$$

vindt men hieruit

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_1 - b_1}} & \frac{1}{\sqrt{a_1 - b_2}} & \frac{1}{\sqrt{a_1 - b_3}} \\ \frac{1}{\sqrt{a_2 - b_1}} & \frac{1}{\sqrt{a_2 - b_2}} & \frac{1}{\sqrt{a_2 - b_3}} \\ \frac{1}{\sqrt{a_3 - b_1}} & \frac{1}{\sqrt{a_3 - b_2}} & \frac{1}{\sqrt{a_3 - b_3}} \end{vmatrix} = 0.$$

Ook hier is van de argumenten der negen wortelgrootheden niets bekend. Zijn evenwel zes parameterwaarden zoodanig aangenomen, dat voor een bepaalde keus der bedoelde argumenten de bovenstaande determinant verdwijnt, dan vindt men teruggaande een bepaalde waarde van x_1 en drie gelijke uitdrukkingen voor $\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}$, waaruit dan volgt, dat drie en dus de vier beschouwde kubische vormen in involutie zijn.

Uitgaande van den determinant, die bij bepaalde keus van de argumenten der wortelgrootheden nul is, kan men door verwisseling der a_k, b_k een soortgelijken determinant afleiden. Als deze nieuwe determinant verdwijnt, behooren dan vier nieuwe vormen

$$(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) \text{ en } (x - a_k)(x - y_k)^2$$

tot een kubische involutie.

De ligging der beide drietallen A_1, A_2, A_3 en B_1, B_2, B_3 is dus volkomen wederkeerig.

Vraagstuk XXX.

D 2 b γ. Gegeven zijn twee gelijke, buiten elkaar gelegen cirkels A en B. Men bepaalt het spiegelbeeld (de inversie) A_1 van B naar A, het spiegelbeeld B_1 van A naar B, het spiegelbeeld A_2 van B_1 naar A enz. In 't algemeen is A_k het spiegelbeeld van B_{k-1} naar A en B_k het spiegelbeeld van A_{k-1} naar B. Men vraagt aan te toonen, dat de stralen der cirkels A, A_1, A_2... eene convergente reeks vormen, zoolang A en B elkaar niet aanraken.

(Dr. J. C. Kluyver.)

Opgelost *door* Dr. J. C. Kluyver *en* J. Stein.

Oplossing *van* J. Stein.

Zij de straal der beide cirkels gelijk aan 1, de afstand der middelpunten gelijk aan a ($a > 2$). De spiegelbeelden der snijpunten van B met de verbindingslijn der middelpunten liggen op afstanden $\frac{1}{a-1}$ en $\frac{1}{a+1}$ van het middelpunt van A zoodat de middellijn van A_1 gelijk is aan $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}$.

Op gelijke wijze vindt men voor de middellijn van A_2 de waarde $\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a-1}} - \dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a+1}}$, en in 't algemeen:

Middellijn van A_n

$$= \frac{1}{a_1 - \dfrac{1}{a_2 - \dfrac{1}{a_3 - \dfrac{\vdots}{\dfrac{1}{a_{n-1} - \dfrac{1}{a_n - 1}}}}}} - \frac{1}{a_1 - \dfrac{1}{a_2 - \dfrac{1}{a_3 - \dfrac{\vdots}{\dfrac{1}{a_{n-1} - \dfrac{1}{a_n + 1}}}}}}$$

$(a = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n)$.

Zij nu $\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}$ de k^{de} naderende breuk van $\{0, a_1, a_2, \ldots a_k \ldots a_\infty\}$, dan vindt men:

$$\text{Midd. } A_n = \frac{\alpha_n(a-1) - \alpha_{n-1}}{\beta_n(a-1) - \beta_{n-1}} - \frac{\alpha_n(a+1) - \alpha_{n-1}}{\beta_n(a+1) - \beta_{n-1}} =$$

$$= \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} - \frac{\alpha_{n+1} + \alpha_n}{\beta_{n+1} + \beta_n} = 2 \cdot \frac{\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1}}{\beta^2_{n+1} - \beta^2_n}.$$

Nu is $\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = (-1)^n \cdot 1 \cdot (-1)^n = +1$; dus de straal van $A_n = \dfrac{1}{\beta^2_{n+1} - \beta^2_n}$; en te bewijzen is, dat

$1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\beta^2_{n+1} - \beta^2_n}$ convergeert voor $a > 2$.

Stelt men $a = 2 + \lambda$, dan is

$$\beta_{n+1} - \beta_n = (a\beta_n - \beta_{n-1}) - \beta_n = \beta_n - \beta_{n-1} + \lambda\beta_n.$$

Evenzoo

$$\beta_n - \beta_{n-1} = \beta_{n-1} - \beta_{n-2} + \lambda\beta_{n-1} \text{ enz.}$$

Dus is $\beta_{n+1} - \beta_n = 1 + \lambda \sum\limits_1^n \beta_p$, en

$$\frac{1}{\beta^2_{n+1} - \beta^2_n} = \frac{1}{(1 + \lambda \sum\limits_1^n \beta_p)(\beta_{n+1} + \beta_n)}.$$

Daar uit de waarde voor $\beta_{n+1} - \beta_n$ blijkt, dat de β's een rij van positieve getallen vormen, waarvan de verschillen grooter zijn dan 1, is $\sum_1^\infty \frac{1}{\beta^2_n}$ eindig.

Nu is $1 + \lambda \sum_1^n \beta_p > \lambda\beta_n$ en $\beta_{n+1} + \beta_n > 2\beta_n$, dus $\beta^2_{n+1} - \beta^2_n > 2\lambda\beta^2_n$, zoodat de reeks $\sum_1^\infty \frac{1}{\beta^2_{n+1} - \beta^2_n}$ sneller convergeert dan $\frac{1}{2\lambda} \sum_1^\infty \frac{1}{\beta^2_n}$.

De reeks der stralen convergeert dus, zoolang λ grooter is dan nul.

Voor $\lambda = 0$, is $\beta_{n+1} - \beta_n = 1$, en de stralen vormen de divergente reeks:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots \frac{1}{2n+1}, \ldots .$$

Uit 't bovenstaande blijkt nog, dat A_∞ gelegen is op een afstand $\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4})$ van 't middelpunt van A.

Vraagstuk XXXI.

M² 1 c α. Met betrekking tot een punt P der spinodale (parabolische) lijn van een algebraisch oppervlak vraagt men de volgende eigenschappen te bewijzen:

a. Indien in P de raaklijn aan de spinodale lijn samenvalt met de raaklijn in het keerpunt der bij P behoorende tangentiaaldoorsnede, dan is P een plooipunt van het oppervlak.

b. Indien in P de aanraking tusschen de spinodale lijn en het raakvlak van het oppervlak van de derde orde is (zoodat dus de afstand tot dit vlak evenredig is met de vierde macht van het boogelement), dan is P een plooipunt.

c. Indien die aanraking van de vierde of *hoogere* orde is, dan is P *òf* een heterogeen dubbelplooipunt *òf* een plooipunt, waar de kromtestraal der spinodale lijn gelijk is aan dien van één der beide aan elkaar rakende takken der tangentiaaldoorsnede.

d. De aanraking tusschen raakvlak en spinodale lijn kan nimmer van de tweede orde zijn. (Dr. D. J. KORTEWEG).

Oplossing *van* Dr. D. J. KORTEWEG.

Nemen wij als y-as de raaklijn van het keerpunt der tangentiaaldoorsnede, als oorsprong het punt P, als xoy-vlak het raakvlak, dan wordt de vergelijking van het oppervlak in reeksontwikkeling:

$$z = c_1x^2 + d_1x^3 + d_2x^2y + d_3xy^2 + d_4y^3 + e_1x^4 + \ldots + f_1x^5 + \ldots$$

Voor de vergelijking der spinodale lijn, bepaald door

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

vindt men gemakkelijk:

$$0 = 4c_1(d_3x + d_4y) + 4(c_1e_3 + 3d_1d_3 - d_2^2)x^2 + 4(3c_1e_4 + 9d_1d_4 - \\ - d_2d_3)xy + 4(6c_1e_5 + 3d_2d_4 - d_3^2)y^2 + \ldots$$

Haar raaklijn heeft dus tot vergelijking:

$$c_1(d_3x + d_4y) = 0.$$

Het geval $c_1 = 0$ (dat een osculatiepunt van het oppervlak kenmerkt) is uitgesloten, daar volgens de onderstelling de spinodale lijn geen dubbelpunt heeft. Voor het samenvallen der raaklijnen is dus noodig $d_4 = 0$ en dit is inderdaad de voorwaarde voor de aanwezigheid van een plooipunt. (*Wiener Sitzungsber.*, Bd. 98, Abth. II, 1889, S. 1154. D. J. KORTEWEG. *Ueber Faltenpunkte* § 1).

Hiermede is het *eerste gedeelte* bewezen.

Wat het tweede betreft, merken wij op dat, tenzij $d_4 = 0$ mocht zijn, de abscis x van de orde is van het boogelement. Wegens den term c_1x^2 kan, waar $c_1 = 0$ uitgesloten is, de aanraking dan echter slechts van de eerste orde zijn. Aanraking van hoogere orde kan dus alleen verkregen worden voor $d_4 = 0$, derhalve voor een plooipunt. Het geval dat tevens $d_3 = 0$ mocht zijn (het geval van het homogeene dubbelplooipunt, l. c. § 10) mag nu wederom uitgesloten worden, daar het evenzeer tot een dubbelpunt der spinodale lijn aanleiding zou geven. Wij hebben dus noodzakelijk, bij aanraking van hoogere orde, $d_4 = 0$, $d_3 \gtrless 0$; dan echter wordt de vergelijking der spinodaallijn bij eerste benadering:

$$x = \frac{d_3^2 - 6c_1e_5}{c_1d_3} y^2,$$

terwijl y evenredig is met het boogelement. Door substitutie van deze uitdrukking in de vergelijking van het oppervlak, waar nu de term met y^3 verdwenen is, vindt men dat de afstand van een naburig punt der spinodale kromme tot het raakvlak wordt aangegeven door den vorm:

$$\left[\frac{(d_3^2 - 6c_1e_5)^2}{c_1d_3^2} + \frac{d_3^2 - 6c_1e_5}{c_1} + e_5\right] y^4.$$

De aanraking is dus *in het algemeen* van de *derde* orde en *nimmer* van de *tweede*, terwijl het punt P een plooipunt is. Hiermede is het *tweede* en *vierde gedeelte* bewezen.

Bij aanraking van de vierde orde wordt blijkbaar voldaan aan

$$(d_3^2 - 6c_1e_5)^2 + d_3^2(d_3^2 - 6c_1e_5) + c_1e_5d_3^2 = 0.$$

Hiervoor kan men schrijven

$$(d_3^2 - 4c_1e_5)(2d_3^2 - 9c_1e_5) = 0.$$

Het verdwijnen van den eersten dezer factoren is de voorwaarde voor het heterogene dubbelplooipunt (l. c. § 11). Wat het nul worden van den tweeden factor beteekent, is meetkundig gemakkelijk te voorzien; het wordt als volgt nader aangetoond.

Voor de vergelijking der tangentiaaldoorsnede wordt bij eerste benadering gevonden (l. c. § 3, waar $z_0 = 0$ te stellen is):

$$x = \left(-\frac{d_3}{2c_1} \pm \frac{1}{2c_1}\sqrt{d_3^2 - 4c_1e_5}\right) y^2.$$

Zal een der beide takken dezelfde kromming bezitten als de spinodale lijn, dan moet voldaan zijn aan

$$\frac{d_3^2 - 6\,c_1e_5}{c_1d_3} = -\frac{d_3}{2\,c_1} \pm \frac{1}{2\,c_1}\sqrt{d_3^2 - 4\,c_1e_5}.$$

Dit uitwerkende, vindt men weer de voorwaarden:

$$(d_3^2 - 4\,c_1e_5)(2\,d_3^2 - 9\,c_1e_5) = 0.$$

Voor $d^2_3 = 4c_1e_5$, dus voor het heterogeene dubbelplooipunt, heeft de spinodale lijn gelijke kromming met *beide* takken der tangentiaaldoorsnede, voor $d^2_3 = \frac{9}{2}\,c_1e_5$ met *één* van beide.

Het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: „*Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*," opgericht in 1779, tracht de beoefening der Wiskunde te bevorderen door

a) het houden van vergaderingen,

b) het uitgeven van tijdschriften,

c) het uitgeven van een reeks vraagstukken ter oplossing voor de leden, later gevolgd door de oplossingen,

d) het uitschrijven van prijsvragen,

e) het inrichten eener boekerij, enz.

De vergaderingen worden zooveel mogelijk maandelijks te Amsterdam gehouden, in de maanden van October tot Maart.

Het tijdschrift „*Revue semestrielle des publications mathématiques*" tracht in den kortst mogelijken tijd beknopte opgaven te verschaffen omtrent de in de verschillende wiskundige tijdschriften opgenomen verhandelingen. Het verschijnt jaarlijks in twee stukken, ieder van ruim honderd bladzijden.

Het tijdschrift getiteld „*Nieuw Archief voor Wiskunde*" geredigeerd door Dr. J. C. Kluyver te Leiden, Dr. D. J. Korteweg te Amsterdam en Dr. P. H. Schoute te Groningen bevat wiskundige verhandelingen. Elke twee jaar verschijnt een deel, bestaande uit vier stukken van ongeveer vijf vel druks.

De voornaamste der door de leden ingezonden oplossingen van de voorgestelde vraagstukken worden gepubliceerd in de „*Wiskundige Opgaven*," geredigeerd door Dr. J. De Vries te Utrecht. Elk deel bevat de oplossingen van 200 vraagstukken in ruim 400 bladzijden; het verschijnt in twee of drie jaar en bij stukken van ongeveer vier vel druks.

Jaarlijks wordt door het Genootschap een twaalftal prijsvragen uitgeschreven. Zij, die na verloop van tijd tien prijsvragen hebben beantwoord, verkrijgen den titel van lid van verdienste.

De bibliotheek, waarvan de boeken op aanvraag bij Dr. C. P. Burger, bibliothecaris van de Universiteits-bibliotheek te Amsterdam, aan de leden worden verzonden, is op de hoogte van den tijd, daar het Genootschap in ruiling is met de voornaamste wiskundige genootschappen in het buitenland.

De *jaarlijksche contributie* van de leden der Vereeniging bedraagt *f* 5,00 (entrée *f* 1,00).

Zij, die nog geen lid zijn en mochten verlangen lid te worden, gelieven zich aan te melden bij den Ondervoorzitter, den Heer D. Coelingh, Marnixstraat 409, Amsterdam.

Sci 900.33

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN

DOOR DE

LEDEN VAN HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP

TER SPREUKE VOERENDE

„Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"

ACHTSTE DEEL.

2de Stuk

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1900.

Ter bevordering eener geregelde toezending van de drukwerken van het Genootschap, worden de leden beleefd verzocht bij verhuizing hun nieuw adres op te geven aan den Heer D. COELINGH, Ondervoorzitter van het Genootschap, Amsterdam, Marnixstraat 400 [illegible]

De volgende vroeger verschenen uitgaven zijn tegen de daarbij aangegeven prijzen te ontbieden bij den Ondervoorzitter, den Heer D. COELINGH, Amsterdam, Marnixstraat 409, bij wien men ook klachten inbrengen kan over eventueele onregelmatigheden in de toezending der uitgaven van het Genootschap.

Feestgave van het Wiskundig Genootschap ter gelegenheid van zijn honderdjarig bestaan, bevattende de herdruk van twee zeldzame, merkwaardige Hollandsche werken [(Corte onderrichtinghe dienende tot het maecken vande reductien vande tacxcustingen tot gereede penningen, om dien-volgende te cysschen en ontfangen den veertichsten penning op alle vercochte of vervreemde onroerende goeden, volgende tplacaet der Heeren Staten van den XXII Decembris 1598) en (Waerdye van Lyf-renten naer proportie van Los-renten, geteekent JOHAN DE WITT, 1671)]
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1885
in den handel *f* 3,00 . . . . voor de leden *f* 1,50.

Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundige wetenschappen (naar den franschen tekst bewerkt), Amsterdam, 1892
in den handel *f* 2,00 . . . . voor de leden *f* 1,00.

Voordrachten over den Grondslag, per vel
in den handel *f* 0,30 . . . . voor de leden *f* 0,15.

Nieuw Archief voor Wiskunde, eerste reeks, twintig deelen, tweede reeks, deel 1 en 2, per deel
in den handel *f* 4,00 . . . . voor de leden *f* 2,00.
(De volgende deelen per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00,
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,50 . . . . voor de leden *f* 0,75).

Wiskundige Opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, deel 1—7 per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,00 . . . . voor de leden *f* 0,50.

Revue semestrielle des publications mathématiques, deel 1—8, elk van twee stukken à *f* 4,00 en bij overcompleete stukken, per stuk *f* 2,00.

Tables des matières des volumes I—V . . . *f* 2,00.

Gemakkelijk blijkt verder dat in beide gevallen de aanraking *in het algemeen* hoogstens van de vierde orde is. Daartoe beschouwe men slechts de vergelijking (3) van § 2 (l. c.); de eerste groep van termen vervalt door de substitutie

$$c_1 d_3 x + (d_3^2 - 6c_1 e_5) y^2,$$

maar de tweede blijft in het algemeen bestaan en voert tot waarden van z, die met y^5 evenredig zijn.

Vraagstuk XXXII.

H 5 d. Men vraagt te integreeren de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

(Dr. S. LEVÄNEN.)

Opgelost *door* Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF *en* Dr. A. J. A. PRANGE.

Oplossing *van* Dr. A. J. A. PRANGE.

Door de substitutie $y = vw$ gaat de gegeven vergelijking over in

$$w \frac{d^2v}{dx^2} + 2\left[\frac{dw}{dx} + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) w\right] \frac{dv}{dx} +$$

$$+ \left[\frac{d^2w}{dx^2} + 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \frac{dw}{dx} - 2w\right] v = 0.$$

Hieruit zal de coëfficient van $\frac{dv}{dx}$ verdwijnen, als men voor w neemt een oplossing der vergelijking

$$\frac{dw}{dx} + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) w = 0,$$

of

$$\frac{dw}{w} + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = 0.$$

Stelt men nu

$$w (\sin x + \cos x) = 1,$$

dan wordt

$$(\cos x + \sin x)\frac{d^2w}{dx^2} + 2(\cos x - \sin x)\frac{dw}{dx} - (\cos x + \sin x)\,w = 0,$$

of

$$\frac{d^2w}{dx^2} + 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\frac{dw}{dx} - w = 0,$$

en men vindt ter bepaling van v de vergelijking

$$\frac{d^2v}{dx^2} - v = 0.$$

Derhalve is

$$y\,(\cos x + \sin x) = Ae^{x} + Be^{-x}.$$

Vraagstuk XXXIII.

M² 3 b. Men vraagt de meetkundige plaats te vinden van een punt, dat met zijn projecties op drie gegeven rechten in een vlak ligt. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing.

Laten de gegeven rechten l_k voorgesteld zijn door

$$x = a_k + \lambda_k\rho, \quad y = b_k + \mu_k\rho, \quad z = c_k + \nu_k\rho, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Het normaalvlak van l_k door het punt P (x, y, z) heeft dan tot vergelijking

$$\lambda_k(X - x) + \mu_k(Y - y) + \nu_k(Z - z) = 0.$$

Voor de projectie P_k van P op l_k vindt men nu

$$\lambda_k(a_k + \lambda_k\rho - x) + \mu_k(b_k + \mu_k\rho - y) + \nu_k(c_k + \nu_k\rho - z) = 0.$$

Hieruit volgt

$$\rho_k = \lambda_k(x - a_k) + \mu_k(y - b_k) + \nu_k(z - c_k).$$

Daar voor P_k de betrekking

$$x_k = a_k + \lambda_k\rho_k$$

geldt, heeft men derhalve

$$x_k = a_k + \lambda^2_k (x - a_k) + \lambda_k \mu_k (y - b_k) + \lambda_k \nu_k (z - c_k).$$

Analoge uitdrukkingen vindt men voor y_k en z_k.

Nu liggen P_1, P_2, P_3 en P in een vlak, wanneer voldaan is aan de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

Voert men hier de waarden van x_k, y_k, z_k in, dan vindt men een kubische vergelijking in x, y, z.

De gevraagde meetkundige plaats is dus een kubisch oppervlak. Uit den aard der zaak bevat dit oppervlak de gegeven rechten l_1, l_2, l_3, wat trouwens door substitutie gemakkelijk kan aangetoond worden. Het oppervlak gaat tevens door de kubische ruimtekromme der punten P, waarvoor P_1, P_2 en P_3 in een *rechte* liggen. (Vergelijk vraagstuk 47 van deel V der *Wisk. Opgaven*).

Vraagstuk XXXIV.

L[1] 11 c. Van een gelijkzijdige hyperbool zijn gegeven een normaal en het middelpunt of een der brandpunten. Men vraagt naar de meetkundige plaats der brandpunten of van het middelpunt.

(J. Neuberg.)

Oplossing *van* T. J. Allersma.

I. Door het gegeven middelpunt O trekken we OX loodrecht op de gegeven normaal n en OY evenwijdig aan n. Noemen we den afstand van n tot OY nu a, dan stelt

$$x^2 - y^2 + 2\lambda xy + \mu = 0$$

alle gelijkzijdige hyperbolen voor, die O tot middelpunt hebben.

Is y_1 de ordinaat van het punt, waartoe n als normaal behoort, dan moet voor $x = a$, $y = y_1$ de vergelijking der raaklijn wezen $y = y_1$. Men heeft dus

$$a + \lambda y_1 = 0 \text{ en } \mu = y_1^2 - a\lambda y_1.$$

Het bedoelde stelsel van hyperbolen wordt derhalve voorgesteld door

$$x^2 - y^2 + 2\lambda xy + a^2 + \frac{a^2}{\lambda^2} = 0.$$

Is (ξ, η) een der brandpunten, dan moet deze vergelijking herleidbaar zijn tot den vorm

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2.$$

Men heeft daartoe de voorwaarden

$$\frac{1 - \alpha^2}{1} = \frac{1 - \beta^2}{-1} = \frac{-\alpha\beta}{\lambda} = \frac{\lambda^2(\xi^2 + \eta^2 - \gamma^2)}{a^2(1 + \lambda^2)},$$

$$\xi + \alpha\gamma = 0, \quad \eta + \beta\gamma = 0.$$

Hieruit leidt men achtereenvolgens af

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2 \quad \text{en} \quad \lambda(\alpha^2 - \beta^2) = 2\alpha\beta;$$

$$\xi^2 + \eta^2 = 2\gamma^2 \quad \text{en} \quad \lambda(\xi^2 - \eta^2) = 2\xi\eta;$$

$$-\frac{\xi\eta}{\lambda\gamma^2} = \frac{\lambda^2(\xi^2 + \eta^2)}{2a^2(1 + \lambda^2)}.$$

Uit de laatste vergelijking vindt men door eliminatie van λ en γ voor de meetkundige plaats der brandpunten de vergelijking

$$2\xi^2\eta^2 + a^2(\xi^2 - \eta^2) = 0.$$

Zij stelt een kromme van de vierde orde voor, die in O een dubbelen buigknoop heeft.

II. Door het gegeven brandpunt O trekken we weer OY evenwijdig aan de gegeven normaal n en OX loodrecht op n. Voor de kegelsneden, die O tot brandpunt hebben, is dan

$$x^2 + y^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2.$$

Behoort n als normaal tot het punt (a, y_1), dan heeft men de voorwaarden

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2, \quad a = \alpha(a\alpha + \beta y_1 + \gamma), \quad y_1^2 = (\beta y_1 + \gamma)(a\alpha + \beta y_1 + \gamma),$$

terwijl het middelpunt der kegelsnede bepaald wordt door

$$x = \alpha(\alpha x + \beta y + \gamma), \quad y = \beta(\alpha x + \beta y + \gamma).$$

Eliminatie van α, β, γ en y_1 tusschen de laatste vijf vergelijkingen levert de vergelijking der meetkundige plaats van het middelpunt.

Stellen wij

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \theta,$$

dan wordt achtereenvolgens

$$x^2 + y^2 = 2\theta^2 \quad , \quad \gamma = -\theta;$$

$$a\theta^2 = x(ax + y_1 y - \theta^2) \quad , \quad y_1^2\theta^2 = (y_1 y - \theta^2)(ax + y_1 y - \theta^2).$$

Als men nu y_1 tusschen de laatste twee vergelijkingen elimineert en vervolgens gebruik maakt van $x^2 + y^2 = 2\theta^2$, komt men ten slotte tot

$$x^2(x^2 + y^2) = (2ax - a^2)(x^2 - y^2).$$

Deze vergelijking stelt een kromme van de vierde orde voor, die in O een knooppunt heeft.

Vraagstuk XXXV.

K 8 c. Om een cirkel met middelpunt O is een vierhoek ABCD beschreven. Worden de afstanden der hoekpunten tot de raakpunten door a, b, c, d aangewezen, en zijn M, N de middens der diagonalen AC, BD, dan heeft men de volgende betrekkingen

$$OA^2 = (a+b)(a+c)(a+d) : (a+b+c+d);$$

$$AC^2 = (a+c)^2 + 4bd(a+c) : (b+d);$$

$$4\,MN^2 = (a+b+c+d)^2 - 4\,\frac{(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)}{(a+c)(b+d)};$$

$$OM : ON = (a+c) : (b+d).$$ (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. A. J. A. PRANGE, Dr. C. STOLP *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing.

1. Als men de halve hoeken van den vierhoek door α, β, γ, δ aanduidt, dan is blijkbaar

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\gamma + \delta) = 0.$$

Stelt r den straal van den ingeschreven cirkel voor, dan heeft men $\operatorname{tg} \alpha = r : a$ enz. Na substitutie vindt men uit bovenstaande vergelijking

$$r^2 = \frac{abc + abd + acd + bcd}{a + b + c + d} = \frac{s_3}{s_1}.$$

Nu is $OA^2 = a^2 + r^2$, en hieruit wordt, na eenige herleiding, verkregen

$$OA^2 = (a + b)(a + c)(a + d) : (a + b + c + d).$$

2. Door vervorming vindt men uit den cosinusregel

$$BD^2 = (AB - AD)^2 + 4AB \,.\, AD \sin^2 \alpha.$$

Nu is $AB = a + b$, $AD = a + d$ en $\sin \alpha = r : OA$, derhalve

$$BD^2 = (b - d)^2 + 4r^2 (a + b)(a + d) : OA^2,$$

of

$$BD^2 = (b - d)^2 + 4r^2 s_1 : (a + c),$$

of

$$BD^2 = (b + d)^2 + 4ac\,(b + d) : (a + c).$$

Door verwisseling van letters volgt hieruit

$$AC^2 = (a + c)^2 + 4bd\,(a + c) : (b + d).$$

3. Men heeft verder

$$4MN^2 = 2AN^2 + 2CN^2 - AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2.$$

Met behulp van 2. vindt men hieruit

$$4MN^2 = s_1{}^2 - 4r^2 s_1{}^2 : (a + c)(b + d),$$

of ook

$$4MN^2 = s_1{}^2 - 4s_1 s_3 : (a + c)(b + d).$$

4. Uit driehoek AOC volgt verder

$$4OM^2 = 2OA^2 + 2OC^2 - AC^2 = (a + c)^2 - 4r^2 (a + c) : (b + d).$$

In verband met de uitdrukking voor $4MN^2$ leidt men hieruit af

$$OM : MN = (a + c) : (a + b + c + d).$$

Dus is ook

$$ON : MN = (b + d) : (a + b + c + d),$$

zoodat

$$OM : ON = (a + c) : (b + d).$$

Opmerking. Blijkbaar is $OM + ON = MN$. Het middelpunt O ligt dus in een rechte met de middens M, N. (C. S.)

Vraagstuk XXXVI.

K 2 d. Op de zijden BC, CA, AB van een driehoek als grondlijnen beschrijft men drie gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken en verbindt hun toppen A', B', C' met het zwaartepunt G van driehoek ABC. Bewijs, dat de rechten door A, B, C evenwijdig met A'G, B'G, C'G getrokken, in één punt samenkomen, en bepaal de meetkundige plaats van dat snijpunt. (Dr. A. J. A. PRANGE.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. A. J. A. PRANGE *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Wij verbinden de middens A_0, B_0, C_0 der zijden BC, CA, AB met de toppen A', B', C' der bedoelde gelijkbeenige driehoeken. Zijn nu A'', B'', C'' de snijpunten van A_0A', B_0B', C_0C' met de rechten, welke door A, B, C evenwijdig loopen met A'G, B'G, C'G, dan volgt uit de gelijkvormigheid der driehoeken A_0GA' en A_0AA'':

$$A_0A' : A_0A'' = A_0G : A_0A = 1 : 3.$$

Derhalve heeft men $A_0A'' = 3A_0A'$.

Daar evenzoo $B_0B'' = 3B_0B'$ en $C_0C'' = 3C_0C'$ is, zijn A'', B'', C'' de toppen van drie gelijkvormige, gelijkbeenige driehoeken A''BC, B''CA, C''AB.

Volgens een bekende eigenschap snijden AA'', BB'', CC'' elkaar dus in een punt S der hyperbool van KIEPERT.

Vraagstuk XXXVII.

K 11 e. In een vlak zijn gegeven de vaste cirkels C_1 en C_2. Twee veranderlijke cirkels C_3 en C_4 raken C_1 en C_2 en elkaar aan. Men vraagt, langs meetkundigen weg, de meetkundige plaats te bepalen van het raakpunt der cirkels C_3 en C_4.

(Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* Dr. C. STOLP *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing.

De cirkels C_1 en C_2 kunnen in elkaar worden omgezet door een inversie, die een der gelijkvormigheidspunten tot centrum

heeft. Bij deze vervorming gaat elk der cirkels C_3, C_4 in zich zelf over; hun raakpunt blijft dus op zijn plaats. Derhalve is de meetkundige plaats van het raakpunt van C_3 en C_4 een cirkel, die een der gelijkvormigheidspunten tot centrum heeft.

Hierbij is ondersteld, dat C_3 en C_4 gelijksoortige aanraking hebben met C_1 en C_2, d. w. z. dat de verbindingslijn der raakpunten R_{13}, R_{23} door hetzelfde gelijkvormigheidspunt gaat als de rechte $R_{14}R_{24}$.

Elke cirkel C_3 wordt blijkens het voorgaande door twee van dezelfde soort aangeraakt, en wel in de snijpunten van C_3 met den overeenkomstigen cirkel van inversie.

Om na te gaan of C_3 nog door andere cirkels C_4 wordt geraakt, maken wij gebruik van de inversie, die R_{23} tot centrum heeft en C_1 in zich zelf omzet. C_3 wordt dan een raaklijn C''' van C_1, en C_2 gaat over in een rechte C'', die evenwijdig loopt met C'''.

Men ziet nu terstond, dat C_1, C'' en C''' door drie cirkels worden aangeraakt. Twee daarvan zijn de inversies van de boven aangewezen, met C_3 gelijksoortige, cirkels. De derde raakt C_1 in zijn raakpunt met C'''; hij is de inversie van een cirkel C_4, die C_1 in R_{13} aanraakt, dus niet gelijksoortig kan zijn met C_3.

Hieruit volgt, dat C_1 en C_2 de meetkundige plaats vormen voor de raakpunten R_{34} van ongelijksoortige cirkels C_3, C_4.

Vraagstuk XXXVIII.

K 14 c α. Op de zijvlakken van een kubus met ribbe a als grondvlakken beschrijft men regelmatige vierzijdige pyramiden met een hoogte x. Voor welke waarde van x is de inhoud van den daardoor gevormden pyramidenkubus een maximum met betrekking tot zijn oppervlak? (Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. KERKHOVEN, Dr. A. J. A. PRANGE *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Zij I de inhoud, O het oppervlak van den pyramidenkubus, ϕ de tweevlakkige hoek gevormd door twee zijvlakken, die in een ribbe van den kubus samenkomen, r de loodlijn uit het

middelpunt van het lichaam op de *vlakken* van den hoek, l de loodlijn op de *ribbe* van den zelfden hoek neergelaten. Men ziet nu onmiddellijk, dat

$$I : O = \tfrac{1}{3}r = \tfrac{1}{3}l \sin \tfrac{1}{2}\phi$$

een maximum zal zijn, als ϕ een gestrekte hoek wordt en het lichaam dus in een ruitentwaalfvlak overgaat. De opstaande zijvlakken van elke pyramide maken dan hoeken van 45° met het grondvlak en de gevraagde hoogte is

$$x = \tfrac{1}{2}a.$$

OPMERKING. Vervangt men den kubus door een ander regelmatig lichaam, waarvan wij het aantal ribben door n zullen aanduiden, dan wordt eveneens I : O een maximum, als het lichaam in een ruiten-n-vlak overgaat. Uit een viervlak ontstaat aldus een kubus, uit een achtvlak een ruitentwaalfvlak, terwijl het twaalf- en twintigvlak ieder een ruitendertigvlak geven. Is ρ de straal van den *in* het regelmatige lichaam beschreven bol, ρ_1 de straal van den ingeschreven cirkel eens zijvlaks, dan is de hoogte van elke pyramide

$$x = \rho_1^2 : \rho.$$

In ons vraagstuk was $\rho = \rho_1 = \tfrac{1}{2}a$.

Vraagstuk XXXIX.

M 5 h β. Door een punt O van een kubische ruimtekromme met drie onderling rechthoekige asymptoten trekt men de onderling loodrechte koorden OA, OB, OC. Bewijs, dat de raaklijn in O loodrecht staat op het vlak ABC. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. J. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN GZ.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN GZ.

1. Gaat een gelijkzijdige kubische hyperbool, d. i. een kubische ruimtekromme, waarvan de asymptoten onderling loodrecht zijn, door de hoekpunten van een orthocentrisch viervlak, dan zal die kromme ook gaan door het orthocentrum van dat viervlak.

2. In een gelijkzijdige kubische hyperbool kunnen ∞^3 orthocentrische viervlakken beschreven worden. Heeft men twee

koorden der kromme, die onderling loodrecht zijn, dan vormen de uiteinden van die beide koorden de vier hoekpunten van eendergelijk viervlak.

3. Zij OL de raaklijn in het punt O der kromme. Een willekeurig vlak, loodrecht op de raaklijn, snijdt de kromme in drie punten A, B en C, zoodanig, dat volgens 2. OABC een orthocentrisch viervlak is, waarvan het orthocentrum op OL, en daar deze raaklijn is, in O moet liggen; de drie rechten OA, OB en OC zijn dus onderling loodrecht. Trekt men omgekeerd uit O drie koorden OA, OB en OC der kromme, die onderling loodrecht zijn, dan is OABC een orthocentrisch viervlak, waarvan het orthocentrum in O ligt. De verbindingslijn van O met dat orthocentrum is de loodlijn uit O op ABC; zij valt samen met de raaklijn der kromme in O.

4. Uit 3. volgt: Trekt men uit O alle mogelijke tripels van onderling loodrechte koorden, dan bepalen deze elk op de kromme drie punten A, B en C. De verschillende vlakken ABC zijn evenwijdig, omdat zij allen loodrecht staan op de raaklijn in A.

5. Brengt men het vlak ABC door O, laat men dus het punt A met O samenvallen, dan zullen de drie rechten OA (de raaklijn in A), OB en OC nog onderling loodrecht zijn; OBC is dus het normaalvlak in O. Derhalve: Alle normaalvlakken eener gelijkzijdige kubische hyperbool snijden die kromme in drie punten, die hoekpunten van een rechthoekigen driehoek zijn. Het hoekpunt van den rechten hoek ligt in dat punt der kromme, waarbij het normaalvlak behoort.

Vraagstuk XL.

K 1 c. Men verlengt de symmedianen van driehoek ABC tot dat ze den omgeschreven cirkel in A′, B′, C′ snijden, en bepaalt de middens A″, B″, C″ van AA′, BB′, CC′. Te bewijzen, dat driehoek A″B″C″ met driehoek ABC de isodynamische centra gemeen heeft. (Dr. J. DE VRIES.)

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

1. Wordt het punt met de rechthoekige coördinaten x, y door de complexe grootheid $x + iy$ aangewezen, dan kan men

de hoekpunten van een driehoek als de wortelpunten van een kubischen vorm beschouwen. Het coördinatenstelsel kan steeds zoo gekozen worden, dat de bedoelde kubische vorm tot de vergelijking

$$k(z+d)^3 + l(z-d)^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

leidt.

Voor $\varepsilon^3 = 1$ heeft men dan

$$\frac{z_1+d}{z_1-d} = \varepsilon\frac{z_2+d}{z_2-d} = \varepsilon^2\frac{z_3+d}{z_3-d}$$

of ook

$$\frac{1}{z_1-d} - \frac{1}{z_2-d} = \varepsilon\left(\frac{1}{z_2-d} - \frac{1}{z_3-d}\right).$$

Door de substitutie $(z-d)w = 1$ vindt men hieruit

$$w_1 - w_2 = \varepsilon(w_2 - w_3).$$

Inversie ten opzichte van elk der punten $z = \pm d$ zet dus de punten A, B, C om in de hoekpunten van een regelmatigen driehoek; de punten $z = \pm d$ zijn derhalve de isodynamische centra van ABC.

2. Het zwaartepunt van ABC wordt bepaald door

$$(k+l)z_0 = 3(l-k)d.$$

We kunnen bijgevolg 1) vervangen door

$$z^3 + 3z_0z^2 + 3d^2z + d^2z_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Door de substitutie $zt = d^2$ wordt deze vergelijking omgezet in

$$t^3 + 3t_0t^2 + 3d^2t + d^2t_0 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waar t_0 voor $d^2 : z_0$ is geschreven.

Blijkbaar wordt elk der wortelpunten A′, B′, C′ van 3) door de punten $\pm d$ harmonisch gescheiden van een der punten A, B, C; d. w. z. het linker lid van 3) verschilt slechts in een factor van den kubischen covariant, die bij 2) behoort. Hieruit volgt, dat elk der punten A′, B′, C′ door een hoekpunt van ABC harmonisch wordt gescheiden van de overige twee hoekpunten.

Dit kan trouwens aldus bevestigd worden:

Men heeft

$$\left(\frac{z_1+d}{z_1-d}\right)^2 = \frac{z_2+d}{z_2-d} \cdot \frac{z_3+d}{z_3-d}.$$

Derhalve wordt het punt t_1, dat door z_1 harmonisch van z_2 en z_3 gescheiden is, aangewezen door

$$\frac{t_1 + d}{t_1 - d} = -\frac{z_1 + d}{z_1 - d},$$

of door

$$z_1 t_1 = d^2.$$

Blijkbaar zijn t_1, t_2, t_3 de snijpunten van cirkel ABC met de symmedianen van ABC.

3. A, B, C, A′, B′, C′ zijn de wortelpunten van de vergelijking

$$(z^3 + 3z_0 z^2 + 3d^2 z + d^2 z_0)(z^3 + 3t_0 z^2 + 3d^2 z + d^2 t_0) = 0,$$

die door de substituties

$$z + \frac{d^2}{z} = 2v, \quad z_0 + t_0 = 2v_0$$

wordt omgezet in

$$v^3 + 3v_0 v^2 + 3d^2 v + d^2 v_0 = 0.$$

Uit den vorm dezer vergelijking blijkt terstond, dat haar wortelpunten een driehoek bepalen, waarvan $z = \pm d$ de isodynamische centra aanwijzen, terwijl uit $z + t = 2v$ volgt, dat deze wortelpunten de middens van AA′, BB′, CC′ zijn.

En hiermede is het bewijs geleverd.

Vraagstuk XLI.

K 2 d. In het vlak van een driehoek ABC construeert men een driehoek A′B′C′, die, met betrekking tot het zwaartepunt van ABC, homothetisch is met den eersten driehoek van BROCARD. Te bewijzen, dat

a) als P een punt is van de hyperbool van KIEPERT, de rechten door A′, B′, C′ evenwijdig met AP, BP, CP getrokken, in een punt samenkomen;

b) dat dit ook het geval is met de loodlijnen uit A′, B′, C′ op AQ, BQ, CQ neergelaten, als Q op de kegelsnede ligt, die door de hoekpunten, het hoogtepunt en het punt van STEINER van driehoek ABC gaat. (Dr. H. VAN AUBEL).

Oplossing *van* DR. H. VAN AUBEL.

1. Is $A_1B_1C_1$ de eerste driehoek van BROCARD, n de verhouding

$$\frac{A_1A'}{A_1G} = \frac{B_1B'}{B_1G} = \frac{C_1C'}{C_1G}$$

en $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$, dan vindt men zonder moeite voor de coördinaten van A'

$$nk^2 + 3(1-n)a^2, \quad nk^2 + 3(1-n)c^2, \quad nk^2 + 3(1-n)b^2,$$

en hieruit de equipollentie

$$A' = \frac{[nk^2 + 3(1-n)a^2]\,A + [nk^2 + 3(1-n)c^2]\,B + [nk^2 + 3(1-n)b^2]C}{3k^2}.$$

Evenzoo vindt men

$$B' = \frac{[nk^2 + 3(1-n)c^2]\,A + [nk^2 + 3(1-n)b^2]\,B + [nk^2 + 3(1-n)a^2]\,C}{3k^2},$$

$$C' = \frac{[nk^2 + 3(1-n)b^2]\,A + [nk^2 + 3(1-n)a^2]\,B + [nk^2 + 3(1-n)c^2]C}{3k^2}.$$

Als nu M, M' de snijpunten zijn van de rechte uit A' evenwijdig aan AP met de rechten uit B', C' evenwijdig aan BP, CP, dan kan men stellen:

$$A'M = xAP, \; B'M = yBP; \qquad A'M' = x'AP, \; C'M' = y'CP,$$

of

$$M = A' + x(P - A) = B' + y(P - B),$$
$$M' = A' + x'(P - A) = C' + y'(P - C).$$

Brengt men hierin de waarde $P = \dfrac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma}$ over, dan vindt men

$$M = A' + x\,\frac{-(\beta+\gamma)A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma} = B' + y\,\frac{\alpha A - (\gamma+\alpha)B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma},$$

$$M' = A' + x'\,\frac{-(\beta+\gamma)A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma} = C' + y'\,\frac{\alpha A + \beta B - (\alpha+\beta)C}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Worden hier A', B', C' door hunne bovenstaande waarden vervangen, dan vindt men door gelijkstelling van coëfficienten

$$\left.\begin{aligned}\frac{(\beta+\gamma)x+\alpha y}{\alpha+\beta+\gamma}&=-(1-n)\frac{c^2-a^2}{k^2},\\ \frac{\gamma x-\gamma y}{\alpha+\beta+\gamma}&=(1-n)\frac{a^2-b^2}{k^2},\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}\frac{(\beta+\gamma)x'+\alpha y'}{\alpha+\beta+\gamma}&=(1-n)\frac{a^2-b^2}{k^2},\\ \frac{\beta x'-\beta y'}{\alpha+\beta+\gamma}&=-(1-n)\frac{c^2-a^2}{k^2}.\end{aligned}\right\}$$

Hieruit volgt

$$x=(1-n)\frac{(a^2-b^2)\alpha-(c^2-a^2)\gamma}{k^2\gamma},\quad x'=(1-n)\frac{(a^2-b^2)\beta-(c^2-a^2)\alpha}{k^2\beta}.$$

Stelt men nu de waarden van x, x' aan elkaar gelijk, hetgeen aanduidt dat de punten M, M′ samenvallen, dan verkrijgt men

$$(b^2-c^2)\beta\gamma+(c^2-a^2)\gamma\alpha+(a^2-b^2)\alpha\beta=0,$$

d. i. de vergelijking der hyperbool van KIEPERT.

2. Zijn N, N′ de snijpunten der loodlijn uit A′ op AP met de loodlijnen uit B′, C′ op BP, CP, dan heeft men de equipollenties:

$$A'N=zi\mathrm{AP},\quad B'N=ui\mathrm{BP},$$
$$A'N'=zi\mathrm{AP},\quad C'N'=u'i\mathrm{CP},$$

of

$$N=A'+zi\frac{-(\beta+\gamma)A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma}=B'+ui\frac{\alpha A-(\gamma+\alpha)B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$N'=A'+z'i\frac{-(\beta+\gamma)A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma}=C'+u'i\frac{\alpha A+\beta B-(\alpha+\beta)C}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Substitueert men de waarden van A′, B′, C′, neemt A als oorsprong, vervangt men AC door

$$\frac{b}{c}(\cos A+i\sin A)\,AB$$

en scheidt men de bestaanbare van de onbestaanbare termen, dan vindt men de twee stelsels vergelijkingen:

$$\frac{b\gamma z\sin A-b\gamma u\sin A}{\alpha+\beta+\gamma}=-(1-n)\frac{c(b^2-c^2)+b(a^2-b^2)\cos A}{2k^2},$$

$$\frac{(c\beta+b\gamma\cos A)z+[c(\gamma+\alpha)-b\gamma\cos A]u}{\alpha+\beta+\gamma}=(1-n)\frac{b(a^2-b^2)\sin A}{2k^2},$$

$$\frac{b\gamma z'\sin A+b(\alpha+\beta)u'\sin A}{\alpha+\beta+\gamma}=(1-n)\frac{c(c^2-a^2)+b(b^2-c^2)\cos A}{2k^2},$$

$$\frac{(c\beta+b\gamma\cos A)z'-[c\beta-b(\alpha+\beta)\cos A]u'}{\alpha+\beta+\gamma}=-(1-n)\frac{b(b^2-c^2)\sin A}{2k^2}.$$

Hieruit leidt men af:

$$\frac{z}{1-n}=-\frac{c^2(b^2-c^2)(\gamma+\alpha)-b^2(a^2-b^2)\gamma+bc\cos A[(a^2-b^2)(\gamma+\alpha)-(b^2-c^2)\gamma]}{2bck^2\gamma\sin A},$$

$$\frac{z'}{1-n}=-\frac{c^2(c^2-a^2)\beta-b^2(b^2-c^2)(\alpha+\beta)-bc\cos A[(c^2-a^2)(\alpha+\beta)-(b^2-c^2)\beta]}{2bck^2\beta\sin A}.$$

Stelt men nu deze waarden aan elkaar gelijk, dan verkrijgt men, met het oog op de betrekking $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$, na eenige herleiding, voor de meetkundige plaats van het punt P, de vergelijking

$$\frac{(a^2-b^2)(k^2-2b^2)-(c^2-a^2)(k^2-2c^2)}{\alpha}+\frac{(b^2-c^2)(k^2-2c^2)-(a^2-b^2)(k^2-2a^2)}{\beta}+$$
$$+\frac{(c^2-a^2)(k^2-2a^2)-(b^2-c^2)(k^2-2b^2)}{\gamma}=0,$$

welke blijkbaar eene kegelsnede voorstelt, die door de punten A, B, C, het hoogtepunt $\left(\frac{1}{k^2-2a^2},\frac{1}{k^2-2b^2},\frac{1}{k^2-2c^2}\right)$ en het punt van STEINER $\left(\frac{1}{b^2-c^2},\frac{1}{c^2-a^2},\frac{1}{a^2-b^2}\right)$ gaat.

Vraagstuk XLII.

M^s 6 a. Gegeven zijn de kwadratische oppervlakken

$$y^2+z^2-2px=0 \text{ en } x^2+y^2-\tfrac{1}{2}z^2-2px-p\sqrt{2}\,.\,z=0.$$

Van welken graad is de doorsnijding van het vlak XOY met het ontwikkelbaar oppervlak der raaklijnen van de snijkromme der beide oppervlakken? Welke bijzonderheden bezit die kromme?

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL.

MEETKUNDIGE OPLOSSING. Stellen we in de gegeven vergelijkingen $z=0$, dan wordt

$$x^2+y^2-2px=0,\ y^2-2px=0,$$

waaruit blijkt, dat de snijlijnen der oppervlakken met XOY in het punt O vier opeenvolgende punten met elkander gemeen hebben; XOY is dus een stationair vlak der snijkromme. Uit den vorm der vergelijkingen blijkt, dat het eerste oppervlak een omwentelingsparaboloïde is en het tweede een kegelvlak, waarvan de top op het vorige oppervlak ligt.

De graad van het ontwikkelbaar oppervlak, beschreven door de raaklijnen der snijkromme, is gelijk aan den rang dezer kromme. Daar zij een dubbelpunt in den top van het kegelvlak bezit, zoo is haar rang gelijk aan zes; hieruit zou volgen, dat het ontwikkelbaar oppervlak van den zesden graad was en een willekeurig vlak in eene kromme van den zesden graad met vier keerpunten en zes dubbelpunten sneed. Daar evenwel XOY een stationair vlak is, wordt de graad van de doorsnijding drie kleiner, omdat drie raaklijnen geheel in dit vlak komen te liggen; de snijkromme wordt dus van den derden graad. Van de dubbelpunten blijft er een over. Hieruit zijn de overige kenmerken gemakkelijk te vinden.

Stelkundige oplossing. De raakvlakken aan de oppervlakken worden gegeven door de vergelijkingen:

$$p(x+x_1) - y_1 y - z_1 z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

$$2(x_1 - p)x + 2y_1 y - (z_1 + p\sqrt{2})z - 2px_1 - p\sqrt{2}\,.\,z_1 = 0 \quad \ldots \quad 2)$$

De punten x_1, y_1, z_1 voldoen aan de voorwaarden:

$$y_1^2 + z_1^2 - 2px_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

$$x_1^2 + y_1^2 - \tfrac{1}{2} z_1^2 - 2px_1 - p\sqrt{2}\,.\,z_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 4).$$

De gevraagde kromme wordt nu gevonden door x_1, y_1 en z_1 te elimineeren en z gelijk aan nul te stellen.

Uit 1) en 2) volgt

$$x_1 = \frac{p\sqrt{2}\,.\,z_1}{2x}; \quad y_1 = \frac{p}{y}\left(x + \frac{p\sqrt{2}\,.\,z_1}{2x}\right).$$

Uit 3) en 4)

$$x_1^2 = \tfrac{3}{2} z_1^2 + p\sqrt{2}\,.\,z_1.$$

Hieruit vindt men

$$z_1 = \frac{2p\sqrt{2}\,.\,x^2}{p^2 - 3x^2}; \quad y_1 = \frac{3px}{y}\left(\frac{p^2 - x^2}{p^2 - 3x^2}\right); \quad x_1 = \frac{2p^2 x}{p^2 - 3x^2}$$

Dus wordt de vergelijking der snijkromme

$$\frac{9p^2x^2(p^2-x^2)^2}{y^2(p^2-3x^2)^2}+\frac{8p^2x^4}{(p^2-3x^2)^2}-\frac{4p^3x}{p^2-3x^2}=0.$$

Na herleiding en verwijdering van den factor $(p-x)^2x$ vindt men de kubische kromme

$$9x(p+x)^2=4y^2(p+2x),$$

welke in $y=0$, $p+x=0$ een keerpunt heeft.

Vraagstuk XLIII.

O 5 j. Wordt gevraagd het oppervlak $z=r$ arc. tg. $\frac{y}{x}$ voor te stellen door vergelijkingen van den vorm

$$x=\int\left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}-\theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right)d\alpha-\int\left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}-\theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right)d\beta,$$

$$y=\int\left(\theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}-\theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right)d\alpha-\int\left(\theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}-\theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right)d\beta,$$

$$z=\int\left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}-\theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right)d\alpha-\int\left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}-\theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right)d\beta,$$

waarin α en β de parameters van de asymptotische lijnen zijn en θ_1, θ_2, θ_3 particuliere oplossingen eener differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta}=f(\alpha,\beta)\,.\,\theta.$$

(Zie DARBOUX, Leçons, deel IV, bl. 24.) (Dr. W. KAPTEIJN.)

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

De asymptotische lijnen op het gegeven oppervlak zijn

$$\alpha=\frac{y}{x}\text{ en }\beta=x^2+y^2.$$

Hieruit volgt voor de richtingscosinussen der normaal

$$c=-\frac{r\alpha}{\sqrt{r^2+\beta}\sqrt{1+\alpha^2}},\quad c'=\frac{r}{\sqrt{r^2+\beta}\sqrt{1+\alpha^2}},\quad c''=-\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{r^2+\beta}}$$

en voor de coördinaten

$$x = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad y = \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad z = r \text{ arc. tg. } \alpha.$$

Nu is het gemakkelijk, te bewijzen dat men heeft

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda\left(c' \frac{\partial c''}{\partial \alpha} - c'' \frac{\partial c'}{\partial \alpha}\right), \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = \mu\left(c' \frac{\partial c''}{\partial \beta} - c'' \frac{\partial c'}{\partial \beta}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \lambda\left(c'' \frac{\partial c}{\partial \alpha} - c \frac{\partial c''}{\partial \alpha}\right), \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = \mu\left(c'' \frac{\partial c}{\partial \beta} - c \frac{\partial c''}{\partial \beta}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \lambda\left(c \frac{\partial c'}{\partial \alpha} - c' \frac{\partial c}{\partial \alpha}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = \mu\left(c \frac{\partial c'}{\partial \beta} - c' \frac{\partial c}{\partial \beta}\right).$$

(Zie DARBOUX, IV, bl. 25 en 26.)

Kiest men dus $\lambda = -\mu = \frac{r^2+\beta}{r}$ en

$$\theta_1 = c\sqrt{\lambda} = -\frac{\alpha\sqrt{r}}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad \theta_2 = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad \theta_3 = -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{r}},$$

dan nemen de coördinaten den bovenstaanden vorm aan. Men vindt n.l.

$$x = \int -\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{(1+\alpha^2)^{3/2}}\,\partial\alpha + \int \frac{1}{2\sqrt{\beta}\sqrt{1+\alpha^2}}\,\partial\beta,$$

$$y = \int \frac{\sqrt{\beta}}{(1+\alpha^2)^{3/2}}\,\partial\alpha + \int \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}\sqrt{1+\alpha^2}}\,\partial\beta,$$

$$z = \int \frac{r}{1+\alpha^2}\,\partial\alpha.$$

Blijkbaar is hier $f(\alpha, \beta) = 0$.

Vraagstuk XLIV.

Fig. Als $2\,\Omega$ eenige periode is van een elliptische functie, heeft men

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_1 u} & \frac{1}{\sigma_2 u} & \frac{1}{\sigma_3 u} \\ \frac{1}{\sigma_1(u - \frac{4}{3}\Omega)} & \frac{1}{\sigma_2(u - \frac{4}{3}\Omega)} & \frac{1}{\sigma_3(u - \frac{4}{3}\Omega)} \\ \frac{1}{\sigma_1(u + \frac{4}{3}\Omega)} & \frac{1}{\sigma_3(u + \frac{4}{3}\Omega)} & \frac{1}{\sigma_3(u + \frac{4}{3}\Omega)} \end{vmatrix} = 0.$$

Men vraagt het bewijs. (Dr. J. C. KLUYVER).

Opgelost *door* Dr. J. C. KLUYVER *en* J. STEIN.

Oplossing *van* J. STEIN.

De determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_1(u-\frac{4}{3}\Omega)} & \dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_2(u-\frac{4}{3}\Omega)} & \dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_3(u-\frac{4}{3}\Omega)} \\ \dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_1(u+\frac{4}{3}\Omega)} & \dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_2(u+\frac{4}{3}\Omega)} & \dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_3(u+\frac{4}{3}\Omega)} \end{vmatrix} = 0.$$

is 1° een oneven functie van u, 2° dubbelperiodiek, en 3° wordt nergens in het perioden-parallelogram oneindig. Hieruit volgt, dat hij nul is.

Het eerste volgt uit het even zijn der functiën $\sigma_a u$. Vervangt men u door $-u$, dan worden in den determinant twee rijen verwisseld, zoodat de determinant van teeken verandert.

Het tweede vindt men door toepassing der formules

$$\sigma_a(u+2\omega_a) = -e^{2\eta_a(u+\omega_a)}\sigma_a u, \text{ en } \sigma_a(u+2\omega_\beta) = +e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_a u.$$

Door toevoeging der periode $2\omega_a$ wordt nl. de tweede rij met $e^{2\eta_a\cdot\frac{4}{3}\Omega}$, de derde met $e^{-2\eta_a\cdot\frac{4}{3}\Omega}$ vermenigvuldigd.

Deze twee eigenschappen blijven blijkbaar bestaan, als men $\frac{4}{3}\Omega$ door een willekeurig argument v vervangt.

De determinant heeft voor $u = \omega_a \pm \frac{4}{3}\Omega$ hoogstens enkelvoudige polen. Nu moet nog aangetoond worden, dat de coëfficient van $\dfrac{\sigma_a u}{\sigma_a(u+\varepsilon\,.\,\frac{4}{3}\Omega)}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ voor $u = \omega_a + \varepsilon\frac{4}{3}\Omega$ nul wordt; m. a. w. dat

$$\frac{\sigma_\beta(\omega_a+\varepsilon\,.\,\frac{7}{3}\Omega)}{\sigma_\beta(\omega_a+\varepsilon\,.\,\frac{8}{3}\Omega)} = \frac{\sigma_\gamma(\omega_a+\varepsilon\,.\,\frac{4}{3}\Omega)}{\sigma_\gamma(\omega_a+\varepsilon\,.\,\frac{5}{3}\Omega)} \text{ is.}$$

Passen wij de formule

$$\sigma_a(u+\omega_\beta) = e^{\eta_\beta u}\sigma_a\omega_\beta\sigma_\gamma u$$

op beide leden toe, dan blijft te bewijzen:

$$\frac{\sigma_\gamma(\frac{4}{3}\Omega)}{\sigma_\gamma(\frac{5}{3}\Omega)} = \frac{\sigma_\beta(\frac{4}{3}\Omega)}{\sigma_\beta(\frac{8}{3}\Omega)}.$$

Merkt men op, dat $\frac{8}{3}\Omega = 4\Omega - \frac{4}{3}\Omega$ is, en gebruikt men de formule

$$\sigma_a(u + 2m\omega_\alpha + 2n\omega_\beta + 2r\omega_\gamma) =$$
$$= (-1)^{nr+rm+mn+m} e^{2(m\eta_\alpha + n\eta_\beta + r\eta_\gamma)(u + m\omega_\alpha + n\omega_\beta + r\omega_\gamma)} \sigma_\alpha u,$$

om de noemers te herleiden, dan verkrijgt men de bedoelde betrekking, daar de machten van e identiek zijn, terwijl de exponent van -1 in beide leden even is, omdat m, n, r even zijn.

(Alle toegepaste formules zijn ontleend aan Tannery et Molk, Fonct. Ell. I, pag. 191.)

Vraagstuk XLV.

M² 1 6 α. Als P een dubbelpunt is van de spinodale lijn van een algebraïsch oppervlak, dan is P op dat oppervlak òf een osculatiepunt òf een homogeen dubbelplooipunt. In het eerste geval bezit het oppervlak van Hesse in P een dubbelpunt, in het tweede geval raakt dit oppervlak in P het oorspronkelijke oppervlak. Men vraagt naar het bewijs van deze eigenschappen.

(Dr. D. J. Korteweg.)

Oplossing *van* Dr. D. J. Korteweg.

Dat P òf een osculatiepunt, òf een homogeen dubbelplooipunt moet zijn, blijkt onmiddellijk uit de vergelijking der spinodale lijn (zie de oplossing van vraagstuk 31). Immers, zullen daaruit wegvallen de termen van den eersten graad, zoo moet òf $c_1 = 0$ zijn en dan heeft men met een osculatiepunt te doen, òf $d_3 = d_4 = 0$ en dit is het kenmerk voor een homogeen dubbelplooipunt. (*Wiener Sitzungsberichte*, Bd. 98, Abth. II, S. 1154, D. J. Korteweg, Ueber Faltenpunkte § 10).

Ten einde de vergelijking van het oppervlak van Hesse af te leiden, kunnen wij echter van de daar gegeven reeksontwikkelingen geen gebruik maken. Wij moeten teruggaan tot de oorspronkelijke vergelijking van het oppervlak.

Beschouwen wij eerst het geval $c_1 = 0$. Voor de vergelijking van het oppervlak kunnen wij dan schrijven, na ze homogeen te hebben gemaakt:

$$\lambda^{n-3}(d'_1x^3 + d'_2x^2y + d'_3xy^2 + d'_4y^3) + \lambda^{n-4}(e'x^4 + \ldots) + \ldots$$
$$+ \lambda^{n-1}a''z + \lambda^{n-2}(b_1''x + b_2''y)z + \lambda^{n-3}(c_1''x^2 + c_2''xy + c_3''y^2)z + \ldots$$
$$+ \lambda^{n-2}a'''z^2 + \lambda^{n-3}(b_1'''x + b_2'''y)z^2 + \ldots.$$
$$+ \lambda^{n-3}a''''z^3 + \ldots\ldots = 0.$$

Van de daaruit voortvloeiende vergelijking van het oppervlak van HESSE in determinantenvorm ontwikkelen wij nu in ieder element slechts de termen van den laagsten graad in x, y en z, tevens $\lambda = 1$ stellende. Wij verkrijgen dan:

$$\begin{vmatrix} 6d_1'x + 2d_2'y + 2c_1''z.., & 2d_2'x + 2d_3'y + c_2''z.., & b_1''.., & (n-2)b_1''z.. \\ 2d_2'x + 2d_3'y + c_2''z.., & 2d_3'x + 6d_4'y + 2c_3''z.., & b_2''.., & (n-2)b_2''z.. \\ b_1''\ldots., & b_2''\ldots., & 2(n-2)a'''.., & (n-1)a''.. \\ (n-2)b_1''z\ldots., & (n-2)b_2''z.., & (n-1)a''.., & (n-1)(n-2)a''z.. \end{vmatrix} = 0$$

en kunnen ons gemakkelijk overtuigen, dat hier geen termen van lageren graad dan den tweeden graad zijn. Immers als men de derde rij en de derde kolom ieder met x vermenigvuldigt, worden alle termen van den ontwikkelden determinant minstens van den vierden graad.

Nemen wij thans het geval $d_3 = d_4 = 0$. Aan de reeds neergeschreven vergelijking van het oppervlak moeten dan nog toegevoegd worden de termen:

$$\lambda^{n-2}(c_1'x^2 + c_2'xy + c_3'y^2).$$

Echter moet dan aan die vergelijking identiek voldaan worden door de reeksontwikkeling:

$$z = c_1x^2 + d_1x^3 + d_2x^2y + b_1x^4 + \ldots\ldots + f_1x^5 + \ldots$$

welke wij weder, met weglating der thans wegens $d_3 = d_4 = 0$ weggevallen termen, aan de oplossing van vraagstuk 31 ontleenen. Voor het wegvallen der termen met xy en y^2 wordt nu vereischt $c_2' = 0$ en $c_3' = 0$, en voor het wegvallen van xy^2 en y^3 nog $d_3' = 0$ en $d_4' = 0$. Ten gevolge daarvan vindt men, wederom voor ieder element slechts de termen van den laagsten graad uitschrijvende, voor de vergelijking van het oppervlak van HESSE:

$$\begin{vmatrix} 2c_1', & 2d_2'x + c_2''z, & b_1'', & (n-2)\,b_1''z \\ 2d_2'x + c_2''z, & 2c_3''z, & b_2'', & (n-2)\,b_2''z \\ b_1'', & b_2'', & 2\,(n-2)\,a''', & (n-1)\,a'' \\ (n-2)\,b_1''z, & (n-2)\,b_2''z, & (n-1)\,a'', & (n-1)(n-2)\,a''z \end{vmatrix} = 0.$$

Een bekende term komt bij de ontwikkeling niet voor; evenmin een term met x of y, maar wèl een term met z, namelijk:

$$2\,(n-1)\,a''c'_1\,[\,(n-2)\,b_2''^2 - 2\,(n-1)\,a''c_3''\,]\,z,$$

zoodat dit oppervlak door het punt P gaat en daar ter plaatse het raakvlak gemeen heeft met het oorspronkelijk oppervlak.

Vraagstuk XLVI.

L[1] 5 a. Als van een kegelsnede gegeven zijn een brandpunt benevens een raaklijn en een normaal, of twee normalen, vraagt men naar de meetkundige plaats van het tweede brandpunt.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* J. NEUBERG *en* J. A. VOLLGRAFF.

Oplossing *van* J. NEUBERG.

I. Zijn F en F′ de brandpunten van een middelpuntskegelsnede met focaalas $2a$; t de raaklijn in P, n de normaal in P′; T en N de spiegelbeelden van F met betrekking tot t en n; M het midden van F′N, dan is blijkbaar

$$\mathrm{F'T} = \mathrm{F'P} + \mathrm{PF} = 2a \quad \text{en}$$

$$\mathrm{MP'} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{F'P'} + \mathrm{NP'}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{F'P'} + \mathrm{FP'}) = a.$$

Worden met betrekking tot een rechthoekig assenkruis, met oorsprong F, de rechten t en n voorgesteld door

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \quad x\cos\beta + y\sin\beta - q = 0,$$

dan hebben T en N tot coördinaten

$$(2p\cos\alpha,\ 2p\sin\alpha), \quad (2q\cos\beta,\ 2q\sin\beta),$$

terwijl de afstanden van N en F′ (x, y) tot n aangewezen zijn door

$$\delta = q, \quad \delta' = x\cos\beta + y\sin\beta - q.$$

Voor een ellips heeft men nu

$$\frac{F'P'}{\delta'} = \frac{NP'}{\delta} = \frac{F'P' + NP'}{\delta' + \delta} = \frac{F'P' - NP'}{\delta' - \delta},$$

dus

$$2MP' = F'P' + NP' = \frac{\delta' + \delta}{\delta' - \delta} F'N.$$

Men ziet gemakkelijk in, dat deze formule ook voor de hyperbool geldt.

Nu is

$$F'T = 2a = 2MP' = \frac{\delta' + \delta}{\delta' - \delta} F'N,$$

zoodat voor de meetkundige plaats van F' wordt gevonden de vergelijking

$$[(x-2p\cos\alpha)^2 + (y-2p\sin\alpha)^2](x\cos\beta + y\sin\beta - 2q)^2 =$$
$$[(x-2q\cos\beta)^2 + (y-2q\sin\beta)^2](x\cos\beta + y\sin\beta)^2,$$

die bij ontwikkeling van den derden graad blijkt te zijn. Deze kromme gaat door N $(2q\cos\beta,\ 2q\sin\beta)$; voor de overeenkomstige kegelsnede is n de as, die den focaalafstand loodrecht middendoor deelt.

II. Kent men twee normalen n_1 en n_2,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \quad \text{en} \quad x\cos\beta + y\sin\beta - q = 0,$$

met voetpunten P_1 en P_2, en zijn N_1, N_2 de spiegelbeelden van F t. o. v. n_1, n_2, terwijl M_1, M_2 de middens van $F'N_1$ en $F'N_2$ aanwijzen, dan is, in overeenstemming met hetgeen boven werd gevonden,

$$2M_1P_1 = \frac{\delta'_1 + \delta_1}{\delta'_1 - \delta_1} F'N_1 \quad \text{en} \quad 2M_2P_2 = \frac{\delta'_2 + \delta_2}{\delta'_2 - \delta_2} F'N_2;$$

hier is

$$\delta_1 = p, \quad \delta'_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p,$$
$$\delta_2 = q, \quad \delta'_2 = x\cos\beta + y\sin\beta - q.$$

Uit

$$M_1P_1 = M_2P_2 = a$$

volgt nu

$$\left(\frac{x\cos\alpha + y\cos\alpha}{x\cos\alpha + y\cos\alpha - 2p}\right)^2 [(x-2p\cos\alpha)^2+(y-2p\sin\alpha)^2] =$$

$$\left(\frac{x\cos\beta + y\cos\beta}{x\cos\beta + y\cos\beta - 2q}\right)^2 [(x-2q\cos\beta)^2+(y-2q\sin\beta)^2].$$

Daar bij ontwikkeling de termen van den zesden graad vervallen, is de meetkundige plaats van F′ een kromme van den vijfden graad, die blijkbaar door de punten N_1 en N_2 gaat.

Vraagstuk XLVII.

L¹ 16 a. Met betrekking tot de zijden van driehoek ABC als coördinaatassen hebben twee rechten v en w de vergelijkingen $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$ en $w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 0$. Als v en w de zijden van dien driehoek achtereenvolgens in M, N, P en M′, N′, P′ snijden, vraagt men de vergelijking te bepalen van de kegelsnede, welke de zes rechten AM, BN, CP, AM′, BN′, CP′ aanraakt. Wanneer

$$a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{23}u_2u_3 + 2a_{31}u_3u_1 = 0$$

de bedoelde kegelsnede voorstelt, heeft men de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Men vraagt dit te bewijzen. (J. NEUBERG.)

Oplossing *van* J. NEUBERG.

I. Wij zullen eerst aantoonen, dat de zes rechten:

$$\begin{array}{ll} \text{AM} \ldots v_2x_2 + v_3x_3 = 0; & \text{AM}' \ldots w_2x_2 + w_3x_3 = 0; \\ \text{BN} \ldots v_3x_3 + v_1x_1 = 0; & \text{BN}' \ldots w_3x_3 + w_1x_1 = 0; \\ \text{CP} \ldots v_1x_1 + v_2x_2 = 0; & \text{CP}' \ldots w_1x_1 + w_2x_2 = 0; \end{array}$$

een zelfde kegelsnede aanraken.

Deze rechten hebben achtereenvolgens tot coördinaten

$$(0, v_2, v_3), \quad (v_1, 0, v_3), \quad (v_1, v_2, 0),$$
$$(0, w_2, w_3), \quad (w_1, 0, w_3), \quad (w_1, w_2, 0).$$

De rechten $(0, v_2, v_3)$ en $(0, w_2, w_3)$ raken de kegelsnede

$$a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{23}u_2u_3 + 2a_{31}u_3u_1 = 0,$$

wanneer voldaan is aan

$$\frac{v_2}{v_3} + \frac{w_2}{w_3} = -\frac{2a_{23}}{a_{22}} \text{ en } \frac{v_2 w_2}{v_3 w_3} = \frac{a_{33}}{a_{22}}.$$

Wij kunnen dus stellen

$$a_{22} = \frac{1}{v_2 w_2}, \quad a_{33} = \frac{1}{v_3 w_3}, \quad 2a_{23} = -\frac{v_2 w_3 + v_3 w_2}{v_2 v_3 w_2 w_3}.$$

Hieruit blijkt, dat de genoemde zes lijnen raken aan de kegelsnede

$$\sum \frac{u_1^2}{v_1 w_1} - \sum \frac{v_2 w_3 + v_3 w_2}{v_2 v_3 w_2 w_3} u_2 u_3 = 0.$$

II. Door vermenigvuldiging met $8 v_1^2 v_2^2 v_3^2 w_1^2 w_2^2 w_3^2$ gaat de determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

over in

$$\begin{vmatrix} 2v_1 w_1 & v_1 w_2 + w_1 v_2 & v_1 w_3 + w_1 v_3 \\ v_1 w_2 + w_1 v_2 & 2v_2 w_2 & v_2 w_3 + w_2 v_3 \\ v_1 w_3 + w_1 v_3 & v_2 w_3 + w_2 v_3 & 2v_3 w_3 \end{vmatrix}.$$

Maar deze determinant is het produkt der determinanten

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & 0 \\ v_2 & w_2 & 0 \\ v_3 & w_3 & 0 \end{vmatrix} \text{ en } \begin{vmatrix} w_1 & v_1 & 0 \\ w_2 & v_2 & 0 \\ w_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix};$$

dus is $\Delta = 0$.

Tot deze uitkomst geraakt men ook door de volgende beschouwing.

De raaklijnen uit A aan de kegelsnede

$$\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$$

worden voorgesteld door

$$a_{22} u_2^2 + 2a_{23} u_2 u_3 + a_{33} u_3^2 = 0.$$

De rechten, welke deze raaklijnen harmonisch scheiden van AB en AC komen dus overeen met

$$a_{22} u_2^2 - 2a_{23} u_2 u_3 + a_{33} u_3^2 = 0.$$

Bijgevolg wordt de kegelsnede

$$\Sigma a_{11} u_1^2 - 2\Sigma a_{12} u_1 u_2 = 0$$

aangeraakt door de zes „harmonikalen" der raaklijnen.

Nu liggen de snijpunten der zes raaklijnen met de overstaande zijden op de beide rechten v en w; de zes „harmonikalen" gaan derhalve drie aan drie door twee punten. Het linker lid der laatste vergelijking kan bijgevolg in twee lineaire factoren ontbonden worden, d. w. z. men heeft $\Delta = 0$.

Vraagstuk XLVIII.

M² 9 d α. Gegeven zijn drie elkaar kruisende rechten en een vlak. Men vraagt het oppervlak te onderzoeken, dat voortgebracht wordt door een veranderlijken cirkel, die evenwijdig is met het gegeven vlak en op de gegeven rechten rust. (Dr. P. H. Schoute.)

Oplossing *van* Dr. P. H. Schoute *en* Dr. J. de Vries.

Zal de cirkel

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \quad z = h,$$

op de rechten l_1, l_2, l_3 rusten, welke bepaald worden door

$$x = m_k z + p_k, \quad y = n_k z + q_k, \quad (k = 1, 2, 3)$$

dan moet voldaan zijn aan

$$(m_k h + p_k)^2 + (n_k h + q_k)^2 + 2a(m_k h + p_k) + 2b(n_k h + q_k) + c = 0.$$
$$(k = 1, 2, 3).$$

Door eliminatie van a, b, c, h uit deze drie voorwaarden en de vergelijkingen van den veranderlijken cirkel vindt men voor de bedoelde meetkundige plaats de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ (m_1 z + p_1)^2 + (n_1 z + q_1)^2 & m_1 z + p_1 & n_1 z + q_1 & 1 \\ (m_2 z + p_2)^2 + (n_2 z + q_2)^2 & m_2 z + p_2 & n_2 z + q_2 & 1 \\ (m_3 z + p_3)^2 + (n_3 z + q_3)^2 & m_3 z + p_3 & n_3 z + q_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Na ontwikkeling vindt men een vergelijking van den vorm

$$(x^2 + y^2)\, \alpha_z^2 + x\beta_z^3 + y\gamma_z^3 + \delta_z^4 = 0.$$

Het oppervlak is dus van den *vierden graad.*

Maakt men de vergelijking homogeen door $z : w$ te schrijven in de plaats van z, dan levert $w = 0$ blijkbaar

$$[\alpha_0 (x^2 + y^2) + \beta_0 xz + \gamma_0 yz + \delta_0 z^2]\, z^2 = 0.$$

De oneindig ver gelegen rechte van XOY is dus een *dubbellijn*.

Stelt men nog $x^2 + y^2 = 0$, dan wordt

$$(\beta_0 x + \gamma_0 y + \delta_0 z) z^3 = 0 ;$$

de onbestaanbare cirkelpunten ω_1 en ω_2 van XOY zijn derhalve *drievoudige punten* van het oppervlak O_4.

Door het bezit van deze drievoudige punten is O_4 volkomen gekenmerkt. Immers zulk een oppervlak moet met elk vlak door deze punten gemeen hebben een kromme van den vierden graad, die in een dubbel gelegde rechte en een kegelsnede ontaardt. Hieruit volgt tevens dat O_4 van de *twaalfde klasse* is.

Door

$$a^2_s = 0$$

worden twee vlakken aangewezen, die O_4 volgens ontaarde cirkels snijden, elk bestaande uit de rechte $\omega_1\omega_2$ en een der gemeenschappelijke rechten v, w van de drie paraboloïden, welke twee der rechten l_1, l_2, l_3 tot richtlijnen en XOY tot richtvlak hebben.

OPMERKINGEN VAN Dr. P. H. SCHOUTE. I. De meetkundige plaats van de middelpunten der cirkels is een kubische ruimtekromme, die de oneindig ver gelegen punten van v en w bevat.

II. Door projectieve vervorming vindt men nog: „De meetkundige plaats der kegelsneden, welke door twee punten P en Q gaan en drie kruisende rechten snijden, is een O^{12}_4, waarvan P en Q drievoudige punten zijn."

III. In aansluiting met het bovenstaande vindt men: „Gegeven de rechten l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 en op l_5 het punt P. De meetkundige plaats der kegelsneden door P, die met l_5 in een vlak liggen en op l_1, l_2, l_3, l_4 rusten, is een O_6 met viervoudige rechte l_5."

„Gegeven zes lijnen l_k. De meetkundige plaats der kegelsneden, die in vlakken door l_6 liggen en op l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 rusten, is een oppervlak van den *achtsten* graad, waarvan l_6 een *zesvoudige lijn* [1]) is. Naast l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 bevat het twintig andere enkelvoudige lijnen."

[1]) In Annuaire de l'Association française 1897, deel I, blz. 175, staat voor de getallen acht en zes verkeerdelijk zes en vier.

Vraagstuk XLIX.

B 7 a, 12 a. Uit de beschouwing van den kubischen binairen vorm en zijn beide covarianten af te leiden, dat de isodynamische centra van een driehoek toegevoegde punten zijn met betrekking tot den omgeschreven cirkel, terwijl de middellijn, die ze bevat, door het punt van LEMOINE gaat. (Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

INLEIDING. I. Bij het afbeelden van alle bestaanbare en onbestaanbare punten eener gegeven rechte l op het complexe vlak kan men zich voorstellen, dat het complexe vlak γ door l gebracht is en l met den daarop gelegen oorsprong van tellen, O, tot x-as en oorsprong van het voor de afbeelding vereischte rechthoekige coördinatenstelsel is aangenomen. Dan zullen alle bestaanbare punten van l met hun beeldpunten samenvallen, de onbestaanbare punten van l zich in γ buiten l afbeelden en de beeldpunten der toegevoegd onbestaanbare punten van l met betrekking tot l symmetrisch gelegen zijn. Op deze wijs kan γ beschouwd worden als het afbeeldingsveld van alle in γ gelegen lijnen l.

Het is duidelijk, dat we in deze richting nog een stap verder kunnen gaan Daartoe beschouwen we in γ behalve de lijn l, een cirkel c, die l niet snijdt. Deze cirkel heeft met l twee toegevoegd onbestaanbare punten gemeen, waarvan we de beeldpunten zullen zoeken. Voor een willekeurig punt Q der loodlijn m uit het middelpunt M van c op l neergelaten, vindt men de snijpunten R, S van den cirkel met de lijn uit Q evenwijdig aan l door op deze laatste lijn van Q af naar weerskanten stukken QR, QS, uit te zetten, die gelijk zijn aan den wortel uit de met het tegengestelde teeken genomen macht van Q ten opzichte van c. Daar nu de macht van het snijpunt N van l en m ten opzichte van c het vierkant van de raaklijn NT is, zijn de snijpunten van l en c bepaald door de abscissen $ON \pm NT\sqrt{-1}$ en worden dus de beeldpunten dier snijpunten gevonden als de snijpunten van m met den cirkel, die N tot middelpunt en NT tot straal heeft. Deze punten P_1, P_2 liggen symmetrisch ten opzichte van l en zijn

aan elkaar toegevoegd met betrekking tot c; want men heeft $MT^2 = MP_1 . MP_2$. Hieruit volgt dus de meer algemeene stelling:

„Elk vlak γ is te beschouwen als de afbeelding van alle „bestaanbare en onbestaanbare punten van elken in γ gelegen „cirkel c; de bestaanbare punten van c vallen met hun beeld„punten samen, de onbestaanbare punten van c worden binnen „of buiten c afgebeeld en de beeldpunten der toegevoegd on„bestaanbare punten van c zijn op een zelfde middellijn van c „gelegen en toegevoegd met betrekking tot c."

INLEIDING. II. De kubische binaire vorm $f \equiv a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 \ldots$ heeft twee covarianten, nl.

$$\Delta = (ab)^2 a_x b_x, \qquad Q = (c\Delta) c_x^2 \Delta_x.$$

Omtrent het verband tusschen f, Δ, Q nemen we het volgende als bekend aan:

a) Zijn A, B, C de drie wortelpunten van den tot de rechte l behoorenden vorm f, dan draagt deze lijn zes punten P, die met A, B, C, telkens in andere volgorde genomen, een bepaalde dubbelverhouding λ opleveren. Als λ verandert, doorloopt dit puntensextupel een involutie van den zesden graad.

b) Voor $\lambda = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$ bestaat de overeenkomstige groep dezer involutie uit twee toegevoegd onbestaanbare punten, elk driemaal geteld; zij zijn de wortelpunten van $\Delta = 0$, d. w. z. $\Delta = 0$ stelt de twee punten D, D′ voor, die met ABC equianharmonisch liggen.

c) Voor $\lambda = -1$ (of $= 2$, of $= \frac{1}{2}$) bestaat de groep der involutie uit drie punten, elk tweemaal geteld; deze drie punten zijn de wortelpunten van $Q = 0$. Anders gezegd, $Q = 0$ bepaalt de drie punten A′, B′, C′ die achtereenvolgens door een der punten A, B, C van de beide andere harmonisch worden gescheiden.

d) Gaat men uit van Q als oorspronkelijken vorm, dan is de nieuwe Q evenredig met f. Dit wordt door CREMONA ongeveer als volgt bewezen:

Uit de gegevens volgt $(A'ABC) = -1$, $(B'BCA) = -1$. Schrijven we voor het laatste $(B'BAC) = -1$ en vergelijken we dit met het eerste, dan blijkt, dat de puntenparen (A′, B′) en (A, B) een involutie bepalen, waarvan Q een der dubbel-

punten is. Uit de betrekking $(C'CAB) = -1$ volgt dan, dat C' het andere dubbelpunt is, zoodat men ook heeft $(CC'A'B') = -1$. Dus scheiden C en C' ook A' en B' harmonisch, enz.

e) De puntenparen (A, A'), (B, B'), (C, C') vormen een involutie, waarvan D, D' de dubbelpunten zijn.

Volgens de bepaling der punten D is

$$(DABC) = (DBCA) = (DCAB) = (D'ACB) = (D'BAC) = (D'CBA).$$

Nu volgt uit $(DABC) = D'ACB)$, dat A een dubbelpunt is van de door de paren (B, C) en (D, D') bepaalde involutie en dan verder uit $(A'ABC) = -1$, dat A' het tweede dubbelpunt is. Hieruit blijkt dus, dat A, A' en D, D' elkaar harmonisch scheiden, enz.

Oplossing. Als de coëfficiënten van den vorm f complex zijn, dan zullen de drie wortels van $f = 0$ in het algemeen complex wezen en komt de afbeelding in het complexe vlak ter sprake. Dan bewijst men gemakkelijk (zie o. a. vraagstuk 22 van deel IV der *Wiskundige Opgaven*), dat de dubbelverhouding ABCP voorgesteld wordt door

$$\left(\frac{AC}{BC} : \frac{AP}{BP}\right) e^{i(\angle BCA - \angle BPA)},$$

waarin AC, BC, AP, BP richtinglooze afstanden zijn. Hieruit volgt dan, onafhankelijk van den stand van het aangenomen coördinatenstelsel, een eenvoudige constructie voor de door $\triangle = 0$ en $Q = 0$ aangewezen punten.

Constructie der punten $\triangle = 0$. Uit de dubbelverhouding $(ABCD) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$ volgt

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = 1, \quad \angle BCA - \angle BDA = \pm \tfrac{1}{3}\pi.$$

Uit de eerste voorwaarde en twee gelijksoortige, die daaruit door cyclische verwisseling van A, B, C ontstaan, blijkt onmiddellijk, dat de punten D, D' de snijpunten zijn van de drie cirkels van Apollonius van driehoek ABC. Deze punten worden gewoonlijk de „isodynamische centra" van driehoek ABC genoemd.

Constructie der punten $Q=0$. Uit de betrekking $(ABCC') = -1$ volgt

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AC'}{BC'} = 1, \quad \angle BCA - \angle BC'A = 0.$$

Dit bewijst, dat C′ het tweede snijpunt is van den om ABC beschreven cirkel met den bij C behoorenden cirkel van APOLLONIUS.

Op den omgeschreven cirkel zijn A en B harmonisch gescheiden door C en C′; dus gaat CC′ door het snijpunt C_1 der raaklijnen a en b in A en B aan cirkel ABC getrokken. Hieruit volgt, dat CC′ een symmediaan van driehoek ABC is en dus door K, het punt van LEMOINE gaat. Want de loodlijnen uit C_1 op BC en CA neergelaten, worden voorgesteld door $BC_1 \sin B$ en $AC_1 \sin A$ en verhouden zich, omdat $BC_1 = AC_1$ is, als de zijden CA en BC. Dus is het punt van LEMOINE het directiecentrum der involutie A, A′; B, B′; C, C′ en zijn de dubbelpunten D, D′ dier involutie de snijpunten van den cirkel ABC met de poollijn van K, d. i. met de lijn van LEMOINE k, die de middelpunten van de cirkels van APOLLONIUS bevat. Derhalve zijn deze punten de op k gelegen punten D, D′, die toegevoegd zijn met betrekking tot cirkel ABC. Omdat deze dubbelpunten de isodynamische centra van driehoek ABC zijn, is hiermee het vraagstuk opgelost.

OPMERKING. Als driehoek ABC gelijkzijdig is, valt een der punten D in het middelpunt van cirkel ABC en heeft het andere op l_∞ een onbepaalde ligging.

Vraagstuk L.

Q 2. In een ruimte $R^{(4)}$ zijn OX_k ($k = 1, 2, 3, 4$) vier twee aan twee loodrecht op elkaar geplaatste assen.

Welke eigenschap bezit de figuur der vijf punten, die men verkrijgt, als men deze assen door een willekeurige ruimte $R^{(3)}$ snijdt en O loodrecht op die ruimte projecteert.

(Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

I. Wordt de bedoelde $R^{(3)}$ voorgesteld door

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_4}{a_4} = 1,$$

dan heeft men voor de loodlijn uit O op $R^{(3)}$

$$a_1x_1 = a_2x_2 = a_3x_3 = a_4x_4.$$

Het voetpunt A_5 dezer loodlijn heeft dan tot coördinaten

$$x_k = \frac{c}{a_k}, \text{ waar } c = 1 : \sum \frac{1}{a^2_k} \text{ is.}$$

Duidt men door A_k ($k = 1, 2, 3, 4$) de punten aan welke $R^{(3)}$ op OX_k bepaalt, dan is blijkbaar

$$A_kA_l^2 = a_k^2 + a_l^2,$$

dus

$$A_kA_l^2 + A_mA_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2.$$

$A_1A_2A_3A_4$ is dus een orthogonaal viervlak, d. w. z. een viervlak, waarvan elke ribbe haar overstaande loodrecht kruist en de vier hoogtelijnen door een punt gaan, dat met elk drietal hoekpunten weer een orthogonaal viervlak vormt. Nu is het gemakkelijk aan te toonen, dat A_5 het bedoelde hoogtepunt is. Immers men heeft

$$A_1A_5^2 = \left(a_1 - \frac{c}{a_1}\right)^2 + \frac{c^2}{a_2^2} + \frac{c^2}{a_3^2} + \frac{c^2}{a_4^2},$$

dus

$$A_1A_5^2 + A_2A_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - c = A_2A_5^2 + A_1^2A_3^2 = A_3A_5^2 + A_1A_2^2.$$

Bijgevolg is $A_1A_2A_3A_5$ ook een orthogonaal viervlak.

De 5 punten A_k vormen dus een groep, waarin elk punt het hoogtepunt is van het viervlak dat door de andere 4 punten bepaald wordt.

II. Duidt men het snijpunt van de rechte A_kA_l met het vlak $A_mA_nA_p$ door A_{kl} aan, dan is A_5 het hoogtepunt van $A_1A_4A_{23}$, en men heeft

$$\triangle A_1A_5A_{45} \sim \triangle A_4A_{23}A_{45}.$$

Hieruit volgt

$$A_1A_{45} : A_4A_{45} = A_5A_{45} : A_{23}A_{45},$$

dus

$$A_4A_{45} \times A_5A_{45} = A_1A_{45} \times A_{23}A_{45}.$$

Maar A_{45} is tevens de projectie van O op het vlak $A_1A_2A_3$, derhalve levert de driehoek A_1OA_{23}, die rechthoekig in O is, de betrekking

$$A_1A_{45} \times A_{23}A_{45} = OA^2_{45}.$$

Bijgevolg is

$$OA^2_{45} = A_4A_{45} \times A_5A_{45},$$

waaruit door vermenigvuldiging met de tweede macht van het oppervlak van $A_1A_2A_3$ volgt

$$(\text{Inhoud } OA_1A_2A_3)^2 = \text{Inh. } A_1A_2A_3A_4 \times \text{Inh. } A_1A_2A_3A_5.$$

Hierin ligt een uitbreiding van een bekende stelling omtrent een viervlak, waarvan drie ribben loodrecht op elkaar staan.

Uit de laatste vergelijking vindt men door verwisseling van aanwijzers nog drie dergelijke betrekkingen, en uit de vier aldus verkregen vergelijkingen volgt door optelling

$$(\text{Inhoud } A_1A_2A_3A_4)^2 = (\text{Inh. } OA_1A_2A_3)^2 + (\text{Inh. } OA_1A_2A_4)^2 +$$
$$+ (\text{Inh. } OA_1A_3A_4)^2 + (\text{Inh. } OA_2A_3A_4)^2.$$

In de door vijf viervlakken ingesloten figuur $OA_1A_2A_3A_4$ is dus het vierkant van den inhoud van een der begrenzende viervlakken even groot als de som van de tweedemachten der inhouden van de overige vier.

Blijkbaar heeft men ook hier een uitbreiding van een eigenschap van het bovengenoemde viervlak.

Vraagstuk LI.

K 8 f. Van den harmonischen koordenvierhoek ABCD houdt men de overstaande hoekpunten A en C vast. Als B zich zoo verplaatst, dat AB : CB standvastig blijft, doorloopt het midden van BD een cirkel. Men vraagt het bewijs. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. C. STOLP *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Zij K het snijpunt der diagonalen van een vierhoek ABCD, dan is

$$\frac{AK}{CK} = \frac{\text{Inh. } \Delta ABD}{\text{Inh. } \Delta CBD} = \frac{AB \,.\, AD \sin A}{CB \,.\, CD \sin C}.$$

Bij een harmonischen koordenvierhoek is niet alleen sin A = sin C, maar ook AB . CD = BC . AD of

$$AB : CB = AD : CD, \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

derhalve

$$AK : CK = (AB : CB)^2 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

In ons vraagstuk is verder aangenomen, dat A en C vast zijn en de verhouding AB : CB standvastig is, hetgeen beteekent, dat B een cirkel doorloopt, die zijn middelpunt op het verlengde der diagonaal AC heeft. Nu volgt uit 1), dat ook D op dezen cirkel ligt, en uit 2), dat K een vast punt is. En wanneer een veranderlijke koorde BD van een vasten cirkel door een vast punt K gaat, beschrijft het midden der koorde een cirkel.

Vraagstuk LII.

K 2 d. Bewijs, dat de isodynamische centra van een driehoek in een cirkel liggen met de brandpunten der ellips, welke de zijden in hun middens aanraakt. (Dr. J. DE VRIES.)

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

Evenals in de oplossing van N°. 40 stellen we de hoekpunten van den driehoek voor door de wortels van

$$z^3 + 3z_0z^2 + 3d^2z + d^2z_0 = 0.$$

Volgens een stelling van F. J. VAN DEN BERG (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, deel IX, bl. 10) zijn de bovenbedoelde brandpunten van STEINER de wortelpunten der afgeleide vergelijking

$$z^2 + 2z_0z + d^2 = 0.$$

Maar deze twee punten vormen een paar der involutie, waarvan $z = d$ en $z = -d$ de dubbelpunten zijn.

Dus liggen de brandpunten van STEINER concyclisch en harmonisch met de isodynamische centra.

OPMERKING. Dr. C. STOLP heeft opgemerkt, dat deze eigenschap bewezen is door Dr. W. KAPTEIJN (Over de merkwaardige punten van den driehoek, *Verh. der K. Akad. v. Wet.* deel III, bl. 29).

Vraagstuk LIII.

K 1 c. Op de zijden van driehoek ABC beschrijft men de rechtstreeks gelijkvormige driehoeken BA'C, CB'A, AC'B, die in B, C, A rechthoekig zijn.

Is $A_1B_1C_1$ de eerste driehoek van BROCARD, dan vraagt men te bewijzen

1°. dat de loodlijnen uit A', B', C' op C_1A_1, A_1B_1, B_1C_1 door één punt gaan;

2°. dat dit ook het geval is met de loodlijnen uit A_1, B_1, C_1 op $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. (Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* Dr. H. VAN AUBEL *en* Dr. A. J. A. PRANGE.

Oplossing *van* Dr. A. J. A. PRANGE.

De hoekpunten van den eersten driehoek van BROCARD vormen een barycentrische groep. Wij zullen daarom een antwoord zoeken op de meer algemeene vraag: Welk barycentrisch drietal $A_1B_1C_1$ heeft de eigenschappen

1°. dat de loodlijnen uit A', B', C' op C_1A_1, A_1B_1, B_1C_1 door één punt gaan;

2°. dat dit ook het geval is met de loodlijnen uit A_1, B_1, C_1 op $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$.

Noemen wij de barycentrische coördinaten van A_1, B_1, C_1 achtereenvolgens $(x_1y_1z_1)$, $(y_1z_1x_1)$ en $(z_1x_1y_1)$. De coördinaten van $A'B'C'$ zijn

$$-(\beta+\gamma),\ \tau+\gamma,\ \beta;\ \gamma,\ -(\gamma+\alpha),\ \tau+\alpha;\ \tau+\beta,\ \alpha,\ -(\alpha+\beta);$$

als α, β, γ en τ de cotangenten voorstellen van de hoeken A, B, C en de aan de zijden van ABC gelegen scherpe hoeken van de driehoeken BCA', ABC', CAB'.

I. Voor C_1A_1, A_1B_1, B_1C_1 vindt men de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} x(z_1x_1-y_1^2)+y(x_1y_1-z_1^2)+z(y_1z_1-x_1^2)&=0\\ x(x_1y_1-z_1^2)+y(y_1z_1-x_1^2)+z(z_1x_1-y_1^2)&=0\\ x(y_1z_1-x_1^2)+y(z_1x_1-y_1^2)+z(x_1y_1-z_1^2)&=0 \end{aligned}\right\}\ (A).$$

Zal de lijn $lx+my+nz=0$ loodrecht staan op de lijn $l_1x+m_1y+n_1z=0$, dan moet voldaan worden aan de voorwaarde:

$$l\{(\beta+\gamma)l_1-\gamma m_1-\beta n_1\}+m\{(\gamma+\alpha)m_1-\alpha n_1-\gamma l_1\}+$$
$$+n\{(\alpha+\beta)n_1-\beta l_1-\alpha m_1\}=0\ .\ .\ .\ .\ 1).$$

Met behulp van deze betrekking vindt men voor de vergelijkingen der bedoelde loodlijnen het stelsel

$$\left.\begin{array}{c}
x[\tau\{\alpha(z_1 - x_1) - \beta(x_1 - y_1)\} + z_1 - x_1] + y(z_1 - x_1) - \\
- z[\tau\{\beta(x_1 - y_1) - \gamma(y_1 - z_1)\} - (z_1 - x_1)] = 0, \\
- x[\tau\{\gamma(z_1 - x_1) - \alpha(x_1 - y_1)\} - (y_1 - z_1)] + \\
+ y[\tau\{\beta(y_1 - z_1) - \gamma(z_1 - x_1)\} + y_1 - z_1] + z(y_1 - z_1) = 0, \\
x(x_1 - y_1) - y[\tau\{\alpha(y_1 - z_1) - \beta(z_1 - x_1) - (x_1 - y_1)] + \\
+ z[\tau\{\gamma(x_1 - y_1) - \alpha(y_1 - z_1)\} + x_1 - y_1] = 0.
\end{array}\right\} \text{(B).}$$

De som der drie vergelijkingen is

$$-\tau(x + y + z)\{(\beta - \gamma)x_1 + (\alpha - \beta)y_1 + (\gamma - \alpha)z_1\} = 0 \,..\, 2).$$

De bedoelde loodlijnen zullen dus door één punt gaan als $(x_1 y_1 z_1)$ gelegen is op de lijn

$$(\beta - \gamma)x_1 + (\alpha - \beta)y_1 + (\gamma - \alpha)z_1 = 0,$$

die het zwaartepunt G met het punt A_1 van den eersten driehoek van BROCARD verbindt.

Stelt men den determinant der coëfficienten van stelsel (B) gelijk aan nul, dan vindt men na eenige herleiding de voorwaarde

$$\tau^3\{(\beta - \gamma)x_1 + (\alpha - \beta)y_1 + (\gamma - \alpha)z_1\}\{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \\ - x_1 y_1 - y_1 z_1 - z_1 x_1\} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 3).$$

II. Voor A'B', B'C', C'A' vindt men de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l}
x\{\tau^2 + (\gamma + \alpha)\tau + 1\} + y\{\tau(\beta + \gamma) + 1\} - z(\tau\gamma - 1) = 0, \\
-x(\tau\alpha - 1) + y\{\tau^2 + (\alpha + \beta)\tau + 1\} + z\{\tau(\gamma + \alpha) + 1\} = 0, \\
x\{\tau(\alpha + \beta) + 1\} - y(\tau\beta - 1) + z\{\tau^2 + \tau(\beta + \gamma) + 1\} = 0,
\end{array}\right\} \text{(C).}$$

en voor de loodlijnen uit A_1, B_1, C_1 op deze lijnen

$$\left.\begin{array}{c}
x\{\tau(\beta y_1 - \gamma z_1) + 2y_1 + z_1\} - y[\tau\{(\beta + \gamma)z_1 + \beta x_1\} + z_1 + 2x_1] + \\
+ z[\tau\{\gamma x_1 + (\beta + \gamma)y_1\} - x_1 + y_1] = 0, \\
x[\tau\{\alpha z_1 + (\gamma + \alpha)x_1\} - z_1 + x_1] + y\{\tau(\gamma x_1 - \alpha y_1) + 2x_1 + y_1\} - \\
- z[\tau\{(\gamma + \alpha)y_1 + \gamma z_1\} + y_1 + 2z_1] = 0, \\
-x[\tau\{(\alpha + \beta)x_1 + \alpha y_1\} + x_1 + 2y_1] + y[\tau\{\beta y_1 + (\alpha + \beta)z_1\} - y_1 + z_1] + \\
+ z\{\tau(\alpha z_1 - \beta y_1) + 2z_1 + x_1\} = 0.
\end{array}\right\} \text{(D)}$$

De som van deze vergelijkingen is wederom

$$-\tau(x+y+z)\{(\beta-\gamma)x_1+(\alpha+\beta)y_1+(\gamma-\alpha)z_1\}=0\,..\,2),$$

terwijl de determinant van het stelsel de voorwaarde levert

$$-\tau(\tau^2+\omega\tau+3)\{(\beta-\gamma)x_1+(\alpha-\beta)y_1+(\gamma-\alpha)z_1\}=0\,..\,4).$$

Het blijkt dus, dat elke barycentrische puntengroep, gelegen op de lijnen, die het zwaartepunt verbinden met de hoekpunten van den eersten BROCARD'schen driehoek, de eigenschappen bezit, die in de opgaaf zijn genoemd.

Vraagstuk LIV.

K 1 d. Op de zijden van driehoek $A_1A_2A_3$ beschrijft men buitenwaarts de vierkanten $A_2B_1C_1A_3$, $A_3B_2C_2A_1$, $A_1B_3C_3A_2$ en binnenwaarts de vierkanten $A_2B'C'A_3$, $A_3B''C''A_1$, $A_1B'''C'''A_2$. Zijn M_1, M_2, M_3 en M', M'', M''' de middelpunten dezer vierkanten en is O het oppervlak van $A_1A_2A_3$, dan heeft men

$$M_1M_2M_3+M'M''M'''=2O$$

en

$$B_1B_2B_3+B'B''B'''=C_1C_2C_3+C'C''C'''=8O.$$

Hier is ondersteld, dat men aan de oppervlakken van twee driehoeken gelijke of verschillende teekens toekent naar gelang hun orientatie al of niet dezelfde is. (Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* Dr. H. VAN AUBEL, Dr. W. BOUWMAN *en* Dr. A. J. W. PRANGE.

Oplossing *van* Dr. W. BOUWMAN.

Als a_1, a_2, a_3 de zijden, A_1, A_2, A_3 de hoeken van driehoek $A_1A_2A_3$ voorstellen, vindt men gemakkelijk

$$\text{Oppervlak } A_1M_3A_2M_1A_3M_2=O+\tfrac{1}{4}(a_1^2+a_2^2+a_3^2);$$

$$\text{Opp. } M_3M_1M_2=\text{Opp. } A_1M_3A_2M_1A_3M_2-\text{Opp. } M_2A_1M_3-$$
$$-\text{Opp. } M_3A_2M_1-\text{Opp. } M_1A_3M_2=O+\tfrac{1}{4}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-$$
$$-\tfrac{1}{4}[a_2a_3\sin(A_1+90^\circ)+a_3a_1\sin(A_2+90^\circ)+a_1a_2\sin(A_3+90^\circ)].$$

Verder is

$$\text{Opp. } A_1M'''A_2M'A_3M''=O-\tfrac{1}{4}(a_1^2+a_2^2+a_3^2);$$

$$\text{Opp. } M'''M'M''=O-\tfrac{1}{4}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-$$
$$-\tfrac{1}{4}[a_2a_3\sin(A_1-90^\circ)+a_3a_1\sin(A_2-90^\circ)+a_1a_2\sin(A_3-90^\circ)\,.$$

Door optelling vindt men hieruit

$$\text{Opp. } M_3M_1M_2 + \text{Opp. } M''M'M'' = 2\,O.$$

Op geheel overeenkomstige wijze vindt men

$$\text{Opp. } A_1B_3A_2B_1A_3B_2 = O + \tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2);$$

$$\text{Opp. } B_3B_1B_2 = O + \tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) -$$
$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{2}[a_2a_3 \sin(A_1+135^\circ) + a_3a_1 \sin(A_2+135^\circ) + a_1a_2 \sin(A_3+135^\circ)];$$

$$\text{Opp. } B''B'B'' = O - \tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) -$$
$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{2}[a_2a_3 \sin(A_1-135^\circ) + a_3a_1 \sin(A_2-135^\circ) + a_1a_2 \sin(A_3-135^\circ)].$$

In aanmerking nemende, dat

$$\sin(A_1 + 135^\circ) + \sin(A_1 - 135^\circ) = -\sin A_1 \sqrt{2}$$

is, vindt men door samentelling

$$\text{Opp. } B_3B_1B_2 + \text{Opp. } B''B'B'' =$$
$$= 2\,O + (a_2a_3 \sin A_1 + a_3a_1 \sin A_2 + a_1a_2 \sin A_3) = 8\,O.$$

Vraagstuk LV.

K 20 a. Men vraagt de formule voor tg $(\alpha + \beta)$ af te leiden uit een figuur. [1] (A. N. GODEFROY.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. J. C. BOLT, Dr. W. BOUWMAN, A. N. GODEFROY, Mej. C. H. DE HAAS, J. A. KERKHOVEN, Dr. C. STOLP, J. A. VOLLGRAFF *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. C. BOLT *en* Dr. C. STOLP.

Blijkbaar behoeft men slechts het bewijs te geven voor het geval, dat de som is een scherpe hoek. Beschouwen we dus den scherphoekigen driehoek ABC met de hoogtelijnen BE en CD, die elkaar in H snijden. Stellen we $\angle ACD = \alpha$ en $\angle DCB = \beta$, dan is

$$\text{tg } (\alpha + \beta) = BE : CE.$$

---

[1]) Dr. A. J. A. PRANGE heeft de opmerking gemaakt, dat een bewijs te vinden is in het Handboek der vlakke driehoeksmeting van J. VERSLUYS (Amsterdam 1894, bl. 72). Uit het groote aantal ingekomen oplossingen blijkt, dat dit niet algemeen bekend is. (RED.)

Uit de gelijkvormige driehoeken ABE en HCE volgt nu

$$BE : CE = AB : CH.$$

Maar

$$AB = AD + DB = CD\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)$$

en

$$CH = CD - HD = CD - DB\,\mathrm{tg}\,\alpha = CD\,(1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta).$$

Dus wordt

$$\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Vraagstuk LVI.

K 4. Van een driehoek zijn gegeven de rechte, welke den tophoek middendoor deelt en de stukken, waarin zij de grondlijn verdeelt. Men vraagt den driehoek te construeeren.

(A. N. GODEFROY.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, A. N. GODEFROY, Mej. C. H. DE HAAS, J. C. DE MASIER, Dr. A. J. A. PRANGE, Dr. C. STOLP *en* H. DE VRIES.

Oplossingen.

I. (Directe constructie van den top.) Zet op een rechte lijn de gegeven stukken AP en PC der grondlijn uit en construeer op het verlengde van AC het punt Q, waarvoor AQ : CQ = AP : PC is. De cirkel, die op PQ als middellijn beschreven is, snijdt den cirkel, die P tot middelpunt en de gegeven deellijn tot straal heeft, in de toppen van twee driehoeken, die aan de vraag voldoen.

II. (Indirecte bepaling van den top.) De lijn, die den tophoek B middendoor deelt, snijdt de grondlijn in P en den omgeschreven cirkel in het midden van boog AC; S ligt dus op de lijn, die AC loodrecht middendoor deelt en heeft van P een afstand, die te vinden is als vierde evenredige tot de gegeven lijnen PB, PA en PC.

Vraagstuk LVII.

K 13 c, 18 g. Een rechte snijdt de vlakken van het viervlak $A_1A_2A_3A_4$ in de punten B_1, B_2, B_3, B_4. Men vraagt te bewijzen,

dat de bollen, welke op A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 als middellijnen worden beschreven, een gemeenschappelijke machtlijn hebben.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, W. MANTEL *en* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing *van* Dr. W. BOUWMAN *en* W. MANTEL.

Worden, met betrekking tot een rechthoekig coördinatenstelsel, waarvan de as OX door de punten B_k gaat, de vier vlakken voorgesteld door

$$a_{1k}x + a_{2k}y + a_{3k}z + a_{4k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

en is A_{ik} de minor van a_{ik} in den determinant der coëfficienten a_{ik}, dan zijn de coördinaten van A_k blijkbaar

$$A_{1k} : A_{4k}, \quad A_{2k} : A_{4k}, \quad A_{3k} : A_{4k},$$

en de coördinaten van B_k

$$-a_{4k} : a_{1k}, \quad 0, \quad 0.$$

De bol, die A_1B_1 tot middellijn heeft, wordt voorgesteld door

$$a_{11}A_{41}(x^2+y^2+z^2)+(a_{41}A_{41}-a_{11}A_{11})x-a_{11}A_{21}y-a_{11}A_{31}z-a_{41}A_{11}=0.$$

Evenzoo vindt men voor de overige drie bollen

$$a_{12}A_{42}(x^2+y^2+z^2)+(a_{42}A_{42}-a_{12}A_{12})x-a_{12}A_{22}y-a_{12}A_{32}z-a_{42}A_{12}=0,$$
$$a_{13}A_{43}(x^2+y^2+z^2)+(a_{43}A_{43}-a_{13}A_{13})x-a_{13}A_{23}y-a_{13}A_{33}z-a_{43}A_{13}=0,$$
$$a_{14}A_{44}(x^2+y^2+z^2)+(a_{44}A_{44}-a_{14}A_{14})x-a_{14}A_{24}y-a_{14}A_{34}z-a_{44}A_{14}=0.$$

En nu is de som der linker leden van deze vier vergelijkingen identiek nul; de bollen hebben derhalve een gemeenschappelijke machtlijn.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Laten α_k en β_k de poolvlakken van A_k en B_k zijn met betrekking tot een bol, die tot middelpunt heeft een der snijpunten S van de op A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 als middellijnen beschreven bollen.

Het vlak β_1 gaat blijkbaar door het punt $P_1 \equiv (\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ en staat loodrecht op het vlak α_1, bevat dus de loodlijn uit P_1 op α_1. Evenzoo bevatten β_2 en β_3 elk een hoogtelijn van het viervlak (α) dat door de vlakken α_k wordt gevormd. De rechte

l, volgens welke β_1, β_2, β_3 en β_4 elkaar snijden, rust derhalve op drie hoogtelijnen van (α), bijgevolg ontmoet zij ook de loodlijn uit P_4 op α_4. Het vlak β_4 bevat dan twee punten van die hoogtelijn, staat dus loodrecht op α_4. Maar dan is $A_4S \perp B_4S$, zoodat de op A_4B_4 als middellijn beschreven bol door het punt S gaat. De vier bollen hebben bijgevolg twee punten gemeen.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

1. De kwadratische oppervlakken, die de zijvlakken van het gegeven viervlak $A_1A_2A_3A_4$ en drie, dus alle, vlakken door de gegeven lijn $l \equiv B_1B_2B_3B_4$ aanraken, vormen een bijzonder tangentieel net, waarvan het achtste basis-raakvlak een willekeurig vlak door l is (vergelijk voor het duale net *Wisk. Opgaven*, deel V, blz. 28—35). Dit net bevat de in twee punten ontaarde oppervlakken (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4). Dus liggen de middens M_1, M_2, M_3, M_4 der segmenten A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 in een vlak, omdat de meetkundige plaats der middelpunten van de oppervlakken van het net een plat vlak is.

De meetkundige plaats van het punt S, waarvoor de raakkegel aan het kwadratisch oppervlak O_2 ingeschreven is in een oneindig aantal drievlakkenhoeken met louter rechthoekige elementen, is een bol, de bol van MONGE. Voor het ontaarde oppervlak (A_1, B_1) is deze bol op A_1B_1 als middellijn beschreven.

De raakkegels, uit een willekeurig punt P aan de kwadratische oppervlakken van het tangentieele net aangebracht, vormen eveneens een tangentieel net. Daar de voorwaarde, die uitdrukt, dat zulk een kegel in een oneindig aantal drievlakkenhoeken met rechthoekige elementen kan beschreven worden, in de coëfficienten der tangentieele vergelijking lineair is, zullen alle kegels van het tangentieele net de genoemde bijzonderheden vertoonen, zoodra dit het geval is met drie die niet tot een zelfde schaar behooren. Kiest men voor P een der beide snijpunten van de op A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 als middellijnen beschreven bollen, dan doet zich dit geval voor. Bijgevolg zijn deze beide punten ook gelegen op den op A_4B_4 als middellijn beschreven bol.

2. De stelling van den heer NEUBERG vormt een sierlijke uitbreiding op de ruimte van een bekend vraagstuk van het platte vlak. De polydimensionale voortzetting dezer uitbrei-

ding voert tot de volgende uitkomst, die langs denzelfden weg wordt aangetoond:

„In een ruimte R_n van n afmetingen is een simplicissimum $A_1A_2 \ldots . A_{n+1}$ gegeven en een lijn l, die de begrenzende ruimten R_{n-1} van dit simplicissimum in de punten $B_1, B_2, \ldots B_{n+1}$ snijdt. De hyperspheren met $n-1$ afmetingen op A_1B_1, $A_2B_2, \ldots A_{n+1}B_{n+1}$ als middellijn beschreven hebben een gemeenschappelijke machtlijn."

Vraagstuk LVIII.

K 13 b. Gegeven zijn een drievlakkenhoek S en een punt D. Een punt M te construeeren, dat het centrum van gemiddelden afstand is met betrekking tot D en de projecties A, B, C van M op de vlakken van S. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Wij noemen de vlakken van S en van zijn supplementairen drievlakkenhoek, die D tot top heeft, achtereenvolgens V_a, V_b, V_c; V'_a, V'_b, V'_c. De laatste drie zijn dan evenwijdig met de vlakken BMC, CMA en AMB, en, daar M het mediaanpunt van ABCD moet wezen, deelen zij de ribben AD, BD, CD middendoor.

Wij zoeken nu eerst de meetkundige plaats van het punt M, als dit in een vlak ligt met zijn projecties B, C en met het midden N der rechte, die D met de projectie A verbindt. Nemen wij A in V_a willekeurig aan en trekken door dit punt een lijn loodrecht op V_a, die met V'_a het punt A′ gemeen heeft, dan is M het snijpunt van AA′ met het vlak door het midden N van AD evenwijdig aan V'_a gebracht, dus het midden van het segment AA′. De bedoelde meetkundige plaats is dus het vlak, dat bepaald is door de snijlijn van V_a met V'_a en door het midden van de loodlijn uit D op V_a neergelaten. Daar de genoemde snijlijn de punten bevat, welke V_a gemeen heeft met de loodlijnen uit D op V_b en V_c, volgt uit onze beschouwing de volgende

CONSTRUCTIE. Trek uit het gegeven punt D loodlijnen op V_a, V_b, V_c en breng een vlak door de snijpunten van elk dier

vlakken met de twee rechten, waarop het niet loodrecht staat, en door het midden der loodlijn uit D op dat vlak. Het snijpunt der drie aldus aangebrachte vlakken is het gevraagde punt M.

OPMERKING. De constructie ondergaat slechts weinig verandering, wanneer men M beschouwt als het middelpunt van in A, B, C, D geplaatste ongelijke massa's.

Vraagstuk LIX.

K 1 c. Als α, β, γ, α', β', γ' de afstanden voorstellen van het punt P tot de zijden en de hoekpunten van een driehoek ABC, vraagt men P zoo te bepalen, dat

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$$

een minimum wordt. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* W. MANTEL, Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

1. Zij P_0 het gevraagde en P een willekeurig punt, D_0, E_0, F_0 de projecties van het eerste, D, E, F die van het tweede punt op de zijden des driehoeks. Is m de minimumwaarde van de bedoelde som, dan kunnen wij voor een willekeurig punt P stellen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = m + \delta^2.$$

Wordt P verbonden met de projecties van P_0, dan is $\alpha^2 + DD_0^2 = PD_0^2$, enz. Door bij beide leden der vergelijking $DD_0^2 + EE_0^2 + FF_0^2$ op te tellen, vindt men

$$PD_0^2 + PE_0^2 + PF_0^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = m + \delta^2 + DD_0^2 + EE_0^2 + FF_0^2.$$

Het eerste lid is nu de som van de kwadraten der afstanden van P tot zes vaste punten. Als zoodanig wordt het een minimum voor het punt van gemiddelden afstand met betrekking tot die zes punten. Uit het tweede lid blijkt verder, dat dit minimum verkregen wordt, als P met P_0 samenvalt. In deze nieuwe beteekenis zullen wij het gevraagde punt verder door P aanduiden.

2. In driehoek ABC is $PD = \alpha$, $PE = \beta$, $PF = \gamma$. De afstanden van E, F en A tot BC zijn achtereenvolgens gelijk aan

$$\alpha + \beta \cos C, \quad \alpha + \gamma \cos B \quad \text{en} \quad \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a}.$$

Het punt P moet nu als centrum van gemiddelden afstand tot A, B, C, D, E, F voldoen aan de voorwaarde

$$6\alpha = (\alpha + \beta \cos C) + (\alpha + \gamma \cos \beta) + \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a},$$

dus aan de betrekking

$$-a\alpha + \frac{b + a \cos C}{3}\beta + \frac{c + a \cos B}{3}\gamma = 0.$$

Hier hebben de coëfficienten van β en γ een eenvoudige meetkundige beteekenis. Zijn toch A′, B′, C′ de projecties van het zwaartepunt G des driehoeks op de zijden BC, CA, AB, dan vindt men

$$CB' = \frac{b}{3} + \frac{a}{3} \cos C = \frac{b + a \cos C}{3}, \quad BC' = \frac{c + a \cos B}{3}, \text{ enz.}$$

Wanneer wij nu de coëfficienten van α, β, γ door $-BC$, CB', BC' vervangen en vervolgens de letters cyclisch permuteeren, krijgen wij de volgende vergelijkingen van drie lijnen, die door het gevraagde punt P gaan en gemakkelijk te construeeren zijn:

$$\left.\begin{aligned} -BC \,.\, \alpha + CB' \,.\, \beta + BC' \,.\, \gamma &= 0, \\ CA' \,.\, \alpha - CA \,.\, \beta + AC' \,.\, \gamma &= 0, \\ BA' \,.\, \alpha + AB' \,.\, \beta - AB \,.\, \gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 1)$$

3. De eerste twee vergelijkingen geven

$$\frac{\alpha}{CB' \,.\, AC' + AC \,.\, BC'} = \frac{\beta}{BC' \,.\, CA' + BC \,.\, AC'} = \frac{\gamma}{CA \,.\, CB - CA' \,.\, CB'}.$$

Om de verbroken regelmaat te herstellen vervangen wij in de eerste breuk

$$CB' \text{ door } CA - AB', \quad BC' \text{ door } AB - AC',$$

en in de tweede

$$CA' \text{ door } BC - BA', \quad AC' \text{ door } BA - BC'.$$

De vergelijkingen nemen dan deze gedaante aan

$$\frac{\alpha}{AB.AC - AB'.AC'} = \frac{\beta}{BC.BA - BC'.BA'} = \frac{\gamma}{CA.CB - CA'.CB'} \quad . \; . \; 2)$$

Vermenigvuldigen wij de eerste, tweede en derde breuk achtereenvolgens met de gelijke breuken $\frac{a}{\sin A}$, $\frac{b}{\sin B}$, $\frac{c}{\sin C}$ en deelen wij vervolgens alle tellers en noemers door 2, dan krijgen wij

$$\frac{\frac{1}{2}a\alpha}{\triangle ABC - \triangle AB'C'} = \frac{\frac{1}{2}b\beta}{\triangle ABC - \triangle BC'A'} = \frac{\frac{1}{2}c\gamma}{\triangle ABC - \triangle CA'B'}.$$

Hierin stellen de tellers inhouden van driehoeken, de noemers inhouden van vierhoeken voor. De eerste x, y, z noemende hebben wij

$$\frac{x}{\text{vierh. } BCB'C'} = \frac{y}{\text{vierh. } CAC'A'} = \frac{z}{\text{vierh. } ABA'B'} \quad . \; . \; . \; 3)$$

Deze vergelijkingen der lijnen AP, BP en CP in baryocentrische coördinaten geven aanleiding tot de volgende eenvoudige

CONSTRUCTIE: Trek uit B′ en C′ rechten evenwijdig met AA′ en uit hun snijpunten B_1 en C_1 met BC lijnen evenwijdig met AB en AC. De lijn, die het snijpunt Q der laatste twee rechten met A verbindt, gaat door het gevraagde punt. Men heeft deze constructie nog slechts te herhalen met betrekking tot een tweede hoekpunt.

Daar men heeft

$$\triangle ACQ = \triangle ACC_1 = \triangle ACA' + \triangle AA'C' = \text{vierhoek } CAC'A'$$

en evenzoo $\triangle ABQ =$ vierhoek ABA′B′, is de vergelijking van AQ

$$y : z = \text{vierh. } CAC'A' : \text{vierh. } ABA'B',$$

wat met 3) overeenstemt.

OPMERKING. Wil men α, β, γ in de lengten a, b, c der zijden uitdrukken, dan kan men van 2) gebruik maken door daarin voor de segmenten der zijden te substitueeren

$$AB' = \frac{3b^2 + c^2 - a^2}{6b}, \quad AC' = \frac{b^2 + 3c^2 - a^2}{6c} \text{ enz.}$$

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

1. De vraagstukken, die de bepaling verlangen van een punt P in het vlak van den driehoek ABC, waarvoor de som der vierkanten van eenige in P samenkomende segmenten een minimum is, laten een gemeenschappelijke ruimteoplossing toe.

Zijn x, y, z de normale coördinaten van P met betrekking tot driehoek ABC, dan geldt de betrekking

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

waarin h_a, h_b, h_c de hoogtelijnen van driehoek ABC voorstellen. Beschouwen we x, y, z als de orthogonale coördinaten van een punt in de ruimte, dan hebben we dus met de punten van het vlak 1) te doen.

Nu laat de voorwaarde, waaraan P moet voldoen, zich steeds vertolken door de vergelijking

$$f_2(x, y, z) = \text{minimum},$$

waarbij $f_2(x, y, z)$ een homogene functie van den tweeden graad voorstelt. Vervangen we deze voorwaarde door

$$f_2(x, y, z) = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2),$$

waarin k een willekeurige constante is, dan komt het oplossen van het vraagstuk neer op de bepaling van de kleinste waarde van k, die met de betrekking 1) vereenigbaar is. Nu stelt 2) bij verandering van k een bundel van gelijkvormige, gelijkstandige en gelijkmiddelpuntige ellipsoïden voor, waarvan het gemeenschappelijk middelpunt in den oorsprong ligt. Onder deze is er een, die het vlak 1) aanraakt. De coördinaten x, y, z van het raakpunt zijn tevens de coördinaten van het gevraagde, in het vlak van driehoek ABC gelegen, punt P.

2. Bovenstaande beschouwing leidt tot een bijzonder eenvoudige oplossing als het punt P gevraagd wordt, waarvoor de som van de vierkanten der afstanden tot de zijden des driehoeks een minimum is. De oppervlakken 2) zijn dan bollen met den oorsprong tot middelpunt, en het bedoelde raakpunt is het voetpunt der loodlijn

$$h_a x = h_b y = h_c z \,.$$

of

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

uit den oorsprong op het vlak 1) neergelaten. In den driehoek is dit het punt van LEMOINE.

3. In het onderhavige geval hebben we te doen met de oppervlakken

$$\Sigma x^2 + \sum \frac{y^2 + z^2 + 2yz \operatorname{Cos} A}{\operatorname{Sin}^2 A} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

We moeten dan het snijpunt bepalen van het vlak 1) met de middellijn der oppervlakken 3) die toegevoegd is aan het met 1) evenwijdige vlak $ax + by + cz = 0$.

Vraagstuk LX.

L[1] **16 a.** De toppen A′, B′, C′ van drie gelijkvormige, gelijkbeenige driehoeken, welke de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC tot grondlijnen hebben, vormen een driehoek A′B′C′, die perspectief ligt met ABC. De as van perspectief omhult de parabool van KIEPERT. (Zie Wisk. Opg. VII, bl. 64.) Men verbindt het brandpunt F van die parabool met A, B, C en trekt uit A′, B′, C′ loodlijnen op AF, BF, CF. Te bewijzen, dat deze loodlijnen door een punt gaan. (Dr. A. J. A. PRANGE.)

Oplossing *van* Dr. A. J. A. PRANGE.

De barycentrische coördinaten van het brandpunt P der parabool van KIEPERT zijn $\frac{1}{\beta - \gamma}, \frac{1}{\gamma - \alpha}, \frac{1}{\alpha - \beta}$, waarin α, β, γ de cotangenten van de hoeken van $\triangle$ ABC aanwijzen. De lijnen AP, BP en CP worden voorgesteld door

$$y(\gamma - \alpha) - z(\alpha - \beta) = 0; \quad z(\alpha - \beta) - x(\beta - \gamma) = 0;$$
$$x(\beta - \gamma) - y(\gamma - \alpha) = 0.$$

De voorwaarde, dat twee lijnen $l_i x + m_i y + n_i z = 0$ $(i = 1, 2)$ loodrecht op elkaar staan, is

$$\Sigma l_1 l_2 (\beta + \gamma) - \Sigma (m_1 n_2 + m_2 n_1) \alpha = 0.$$

De coördinaten der punten A′, B′, C′ zijn, als men den cotangens der scherpe hoeken van de gelijkbeenige driehoeken τ noemt,

$$\beta + \gamma, \tau - \gamma, \tau - \beta; \; \tau - \gamma, \gamma + \alpha, \tau - \alpha; \; \tau - \beta, \tau - \alpha, \alpha + \beta.$$

Voor de lijnen, door A', B', C' loodrecht op PA, PB, PC getrokken, vindt men de vergelijkingen:

$$x\{\tau(\alpha+\beta+\gamma)-1\}(\beta-\gamma)-y\{\tau(\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma)+\beta-\gamma\}+$$
$$+z\{\tau(\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma)-\beta+\gamma\}=0,$$
$$x\{\tau(\gamma^2+\alpha^2-\beta\gamma-\alpha\beta)-\gamma+\alpha\}+y\{\tau(\alpha+\beta+\gamma)-1\}(\gamma-\alpha)-$$
$$-z\{\tau(\gamma^2+\alpha^2-\beta\gamma-\alpha\beta)+\gamma-\alpha\}=0,$$
$$-x\{\tau(\alpha^2+\beta^2-\gamma\alpha-\beta\gamma)+\alpha-\beta\}+y\{\tau(\alpha^2+\beta^2-\gamma\alpha-\beta\gamma)-\alpha+\beta\}+$$
$$+z\{\tau(\alpha+\beta+\gamma)-1\}=0.$$

Daar de som der linker leden nul is, gaan de genoemde loodlijnen door een punt.

Vraagstuk LXI.

K 5 c. In het vlak van een driehoek ABC is een rechte lijn gegeven, waarop de hoekpunten uit drie punten P, Q, R als centra geprojecteerd worden. Men vraagt deze centra zoo te bepalen, dat de projecties van A, B, C uit P achtereenvolgens samenvallen met de projecties van B, C, A uit Q en tevens met de projecties van C, A, B uit R. (Dr. C. STOLP.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, J. A. KERKHOVEN, W. MANTEL, Dr. A. J. A. PRANGE, Dr. P. H. SCHOUTE, Dr. C. STOLP *en* H. DE VRIES.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Wij zullen de projecties van A, B, C op de gegeven rechte l uit het centrum P door L, M, N aanwijzen; de snijpunten van l met BC, CA, AB door G, H, I; het snijpunt van BC en AP door X, dat van CA en BM door Y en het snijpunt van AG en BH door Z.

Van den zeshoek APBRCQ snijden de overstaande zijden elkaar in de op l gelegen punten L, M, N; die zeshoek is dus beschreven in een kegelsnede K_2.

Door de stelling van PASCAL toe te passen op den zeshoek AAPBCR vindt men, dat de raaklijn in A aan K_2 getrokken, de rechte l in een punt van BC, dus in G snijdt. Evenzoo vindt men, dat de raaklijn in B door H gaat.

Ten slotte blijkt uit de beschouwing van den zeshoek AAPBBC, dat de raaklijnen in A en B aan K_2, dus de lijnen AG en BH, in een punt Z van XY samenkomen; X, Y, Z liggen dus in een rechte.

Men kan derhalve op l het punt L willekeurig kiezen; X wordt dan bepaald door AL en BC. Verbindt men het snijpunt Z van AG en BH met X, dan verkrijgt men Y in het snijpunt dezer verbindingslijn met AC, en P wordt bepaald door de lijnen AL en BY. De punten Q en R kunnen dan gemakkelijk gevonden worden.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

1. Noemen we de bedoelde projecties in de aangegeven orde U, V, W, dan zijn de drietallen van punten

PAU,	PBV,	PCW
QCV,	QAW,	QBU
RBW,	RCU,	RAV

collineair. Dus vormen de negen punten P, Q, R, A, B, C, U, V, W de basis van een bundel kubische krommen. Daar van deze negen punten U, V, W op een rechte liggen, liggen de andere zes op een kegelsnee.

2. We nemen een centrale projectie van de beschouwde figuur, waarbij de gevonden kegelsnee een cirkel geworden en de gegeven lijn in het oneindige verdwenen is. Dan zijn, zoo als uit de evenwijdigheid der lijnendrietallen volgt, de zes punten P, Q, R, A, B, C de hoekpunten van een zeshoek PARBQC met hoeken van 120° en afwisselend gelijke zijden. Anders gezegd, ABC en PQR zijn twee verschillend georiënteerde ingeschreven gelijkzijdige driehoeken. Omdat ABC gegeven is, wordt het aantal oplossingen dus oneindig groot; de merkwaardigste is die, waarbij de driehoeken ABC en PQR samen het bekende handelsmerk vormen.

3. We vinden nu de oplossing van het vraagstuk voor den oorspronkelijken stand der gegevens door terugprojecteeren. Zijn A′, B′, C′ achtereenvolgens de snijpunten van BC, CA, AB met de gegeven lijn l, dan liggen P, Q, R op de kegelsnee door A, B, C, die in deze punten achtereenvolgens de lijnen AA′, BB′, CC′ aanraakt. Op deze kegelsnee kan het punt P

geheel willekeurig worden aangenomen; de bijbehoorende punten Q en R volgen dan uit het liggingsverband.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Laten

$$\left.\begin{array}{l} A_p,\ B_p,\ C_p \\ A_q,\ B_q,\ C_q \\ A_r,\ B_r,\ C_r \end{array}\right\} \text{ de projecties van A, B, C uit } \left\{\begin{array}{l} P, \\ Q, \\ R, \end{array}\right.$$

op de gegevene lijn d zijn. Wij nemen ABC als assendriehoek van een trilineair coördinatenstelsel; zij

$$lx + my + nz = 0$$

de vergelijking van d en stellen wij de coördinaten van P, Q, R door

$$(x_1,\ y_1,\ z_1),\qquad (x_2,\ y_2,\ z_2),\qquad (x_3,\ y_3,\ z_3)$$

voor, dan heeft men de volgende vergelijkingen:

$$\text{(AP)}\ \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1},\qquad \text{(BP)}\ \frac{z}{z_1} = \frac{x}{x_1},\qquad \text{(CP)}\ \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1},$$

$$\text{(AQ)}\ \frac{y}{y_2} = \frac{z}{z_2},\qquad \text{(BQ)}\ \frac{z}{z_2} = \frac{x}{x_2},\qquad \text{(CQ)}\ \frac{x}{x_2} = \frac{y}{y_2},$$

$$\text{(AR)}\ \frac{y}{y_3} = \frac{z}{z_3},\qquad \text{(BR)}\ \frac{z}{z_3} = \frac{x}{x_3},\qquad \text{(CR)}\ \frac{x}{x_3} = \frac{y}{y_3}.$$

Zullen nu A_p, B_p, C_p samenvallen met B_q, C_q, A_q, dan moeten de drietallen (AP, BQ, d), (BP, CQ, d), (CP, AQ, d) telkens door één punt gaan, hetgeen plaats heeft als voldaan wordt aan

$$lx_1x_2 + mx_1y_2 + nz_1z_2 = 0,\qquad lx_1y_2 + my_1y_2 + ny_1z_2 = 0,$$
$$lz_1x_2 + my_1z_2 + nz_1z_2 = 0.$$

Door eerst x_2, y_2, z_2, daarna x_1, y_1, z_1 te elimineeren, vinden wij, na deeling door $lx_1 + my_1 + nz_1$ en $lx_2 + my_2 + nz_2$,

$$mny_1z_1 + nlz_1x_1 + lmx_1y_1 = 0,$$
$$mny_2z_2 + nlz_2x_2 + lmx_2y_2 = 0.$$

Zullen A_p, B_p, C_p samenvallen met C_r, A_r, B_r, dan moet voldaan zijn aan

$$mny_3z_3 + nlz_3x_3 + lmx_3y_3 = 0.$$

Hieruit blijkt, dat P, Q, R allen op de kegelsnede K_2,

$$mnyz + nlzx + lmxy = 0,$$

moeten liggen. Een dezer punten, b.v. P, kan willekeurig op K_2 worden aangenomen, terwijl uit de bovenstaande vergelijkingen volgt, dat Q en R dan bepaald worden door

$$lx_2 : my_2 : nz_2 = my_1 : nz_1 : lx_1 \text{ en } lx_3 : my_3 : nz_3 = nz_1 : lx_1 : my_1.$$

Constructie. Laten D, E, F de snijpunten zijn van d met BC, CA, AB; zij H het snijpunt van AD en BE. Trek door H eene willekeurige lijn, welke BC in α, AC in β snijdt; trek $A\alpha$ en $B\beta$, dan is het snijpunt P van $A\alpha$ en $B\beta$ een willekeurig punt van K_2. Bepaal de centrale projecties A_p, B_p, C_p van A, B, C uit P op d, vervolgens de snijpunten Q en R van (AC_p, CB_p) en (BC_p, AB_p), dan zijn P, Q, R drie bij elkaar behoorende punten, die de gevraagde eigenschap bezitten.

Bewijs. Uit de vergelijking van d volgt voor die van AD en BE

$$my + nz = 0 \quad \text{en} \quad nz + lx = 0.$$

Zij de vergelijking van $\alpha\beta$

$$my + nz + \theta(nz + lx) = 0,$$

dan zijn die van $A\alpha$ en $B\beta$

$$my + (1 + \theta)nz = 0 \quad \text{en} \quad \theta lx + (1 + \theta)nz = 0,$$

waaruit door eliminatie van θ voor de vergelijking der meetkundige plaats van P volgt

$$mnyz + nlzx + lmxy = 0,$$

zoodat P, bij draaiing van $\alpha\beta$ om H, de kromme K_2 beschrijft.

Opmerkingen. I. Men kan het vraagstuk ook aldus stellen: „Een driehoek PQR te bepalen, die trihomoloog is met een gegeven driehoek ABC, zoodat de drie centra van perspectief op een gegeven rechte liggen." Onder de oneindig vele driehoeken, die aan de vraag voldoen, heeft een nog een bijzondere ligging. Is nl. A'B'C' de driehoek, gevormd door de

raaklijnen in A, B, C, en neemt men P in het snijpunt van CC′ met de kegelsnede, dan komen Q en R op BB′ en AA′, zoodat S ≡ (AA′, BB′, CC′) een vierde centrum van perspectief is geworden. (C. S.)

II. Ligt de gegeven rechte oneindig ver, dan wordt S het centrum der kegelsnede en deze gaat over in de ellips van STEINER, in overeenstemming met vraagstuk I van den heer VAN AUBEL. (C. S.)

III. A, B, C en P, Q, R zijn connexe inflexietripels op elke kubische kromme, welke deze zes punten verbindt met de op l gelegen projecties U, V, W van A, B, C. De laatste drie punten zijn buigpunten der kromme. (Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung, bl. 288 enz.) (H. D. V.)

Vraagstuk LXII.

L[1] 18 b. Hoeveel kegelsneden van een bundel hebben in de basispunten een top? (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN, H. DE VRIES, Dr. J. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

1. Zij A een der basispunten van den bundel. Beschouwt men een door A gebrachte rechte r als raaklijn van een kegelsnede, dan is deze benevens haar middelpunt M en de loodlijn a in A op AM geheel bepaald.

Moet omgekeerd een door A getrokken rechte a loodrecht zijn op de door A bepaalde middellijn eener kegelsnede, dan zijn er in den bundel twee krommen, die aan deze voorwaarde voldoen. Immers de middelpunten der kegelsneden van den bundel vormen een kegelsnede, die, zoolang A een enkelvoudig basispunt is, niet door A gaat. Deze kegelsnede wordt door de loodlijn in A op a in twee punten gesneden, welke de middelpunten zijn van twee krommen uit den bundel, voor welke a loodrecht is op de middellijn die door A gaat.

Tusschen de stralen r en de stralen a bestaat dus een overeenkomst (1,2). Het komt dus driemaal voor, dat een raaklijn r loodrecht staat op de door A getrokken middellijn der over-

eenkomstige kromme. Bijgevolg hebben *drie* kegelsneden in A een top.

2. Uit de analytische behandeling van het vraagstuk kunnen gemakkelijk enkele gevallen worden afgeleid, waarin de drie bedoelde kegelsneden eenvoudig kunnen geconstrueerd worden.

Is A de oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel, dan wordt de bundel voorgesteld door een vergelijking van den vorm

$$(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{12}x + 2a_{23}y) + \lambda\,(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + \\ + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y) = 0.$$

Het middelpunt der bij een bepaalde waarde van λ behoorende kegelsnede is aangewezen door

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \lambda\,(b_{11}x + b_{12}y + b_{13}) = 0,$$
$$(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) + \lambda\,(b_{12}x + b_{22}y + b_{23}) = 0,$$

dus stelt

$$[a_{11} + \lambda b_{11})\,(a_{23} + \lambda b_{23}) - (a_{12} + \lambda b_{12})\,(a_{13} + \lambda b_{13})]\,x + \\ + [(a_{12} + \lambda b_{12})\,(a_{23} + \lambda b_{23}) - (a_{22} + \lambda b_{22})\,(a_{13} + \lambda b_{13})]y = 0$$

de middellijn uit A voor.

Zal deze rechte loodrecht staan op de raaklijn

$$(a_{13} + \lambda b_{13})\,x + (a_{23} + \lambda b_{23})\,y = 0,$$

dan moet λ voldoen aan de vergelijking:

$$[a_{11} - a_{22} + \lambda\,(b_{11} - b_{22})]\,(a_{13} + \lambda b_{13})\,(a_{23} + \lambda b_{23}) - \\ - (a_{12} + \lambda b_{12})\,[(a_{13} + \lambda b_{13})^2 - (a_{23} + \lambda b_{23})^2] = 0.$$

De wortels dezer derdemachtsvergelijking leveren de drie kegelsneden, welke aan de vraag voldoen.

Hebben de krommen van den bundel in A de raaklijn gemeen, dan kan men stellen

$$a_{13} = b_{13} \quad \text{en} \quad a_{23} = b_{23}.$$

Onze derdemachtsvergelijking gaat dan over in

$$(1+\lambda)^2\{[a_{11} - a_{22} + \lambda\,(b_{11} - b_{22})]\,a_{13}a_{23} - (a_{12} + \lambda b_{12})\,(a_{13}^2 - a_{23}^2)\} = 0.$$

De beide wortels $\lambda = -1$ wijzen de ontaarde kegelsnede aan, welke uit de rechten bestaat, die A met de overige twee basispunten verbinden.

De eenige, niet ontaarde, kegelsnede, welke in A een top heeft, wordt door den derden wortel bepaald. Haar middelpunt is blijkbaar het tweede snijpunt van de meetkundige plaats der middelpunten (welke nu door A gaat) met de in A getrokken normaal.

3. Bovenstaande derdemachtsvergelijking kan gesplitst worden in vergelijkingen van lager graad, wanneer men heeft

$$a_{11} = a_{22}, \qquad b_{11} = b_{22}.$$

De bundel bevat dan voor $a_{12} + \lambda b_{12} = 0$ een cirkel. Daar deze aan de vraag voldoet, moet de derdemachtsvergelijking deelbaar zijn door $a_{12} + \lambda b_{12}$. De beide overige wortels voldoen dan aan

$$(a_{13} + \lambda b_{13})^2 - (a_{23} + \lambda b_{23})^2 = 0.$$

Voor de beide overeenkomstige kegelsneden gaat de vergelijking

$$(a_{13} + \lambda b_{13})\, x + (a_{23} + \lambda b_{23})\, y = 0$$

der raaklijn in A over in

$$x - y = 0 \qquad \text{en} \qquad x + y = 0.$$

Deze raaklijnen loopen dus evenwijdig met de assen der tot den bundel behoorende gelijkzijdige hyperbool

$$(a_{12}b_{11} - b_{12}a_{11})\, xy + (a_{13}b_{11} - b_{13}a_{11})\, x + (a_{23}b_{11} - b_{23}a_{11})\, y = 0.$$

Vraagstuk LXIII.

O 5 j α. Men vraagt een oppervlak te bepalen, waarvoor de rechthoekige coördinaten der punten, als functies van u en v, aan de vergelijkingen $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{\partial w}{\partial v}$ en $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{\partial w}{\partial u}$ voldoen, en daarna de vergelijkingen te bepalen van de kromtelijnen op dat oppervlak.

(Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. J. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

1. Dadelijk valt op te merken, dat bij een dergelijk oppervlak u en v de parameters der asymptotische lijnen zullen

zijn, m. a. w. dat $u = a$, $v = b$, de vergelijkingen zijn van die krommen. Immers, in 't algemeen worden de asymptotische krommen bepaald door de vergelijking

$$D\,du^2 + 2\,D'du dv + D''dv^2 = 0;$$

waarin

$$D = \Sigma \pm \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v},\quad D' = \Sigma \pm \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\,\frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$D'' = \Sigma \pm \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v} \text{ is.}$$

Daar nu gegeven is $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial x}{\partial u}$ enz., heeft men $D = 0$, $D'' = 0$, zoodat bovenstaande vergelijking overgaat in

$$du\,dv = 0;$$

dus is $$u = a, \qquad v = b.$$

In het algemeen is de differentiaalvergelijking der kromtelijnen van een oppervlak

$$(ED' - FD)\,du^2 + (ED'' - GD)\,du\,dv + (FD'' - GD')\,dv^2 = 0,$$

waarin $E = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$, $F = \Sigma\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial u}$, $G = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$ is.

In het beschouwde geval wordt die vergelijking

$$E du^2 - G dv^2 = 0.$$

2. Aan de partiëele differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{\partial w}{\partial v},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{\partial w}{\partial u}$$

wordt voldaan door $w = e^{au+bv}$ te nemen, mits tusschen de constanten a en b de betrekkingen $a^2 = b$ en $a = b^2$ bestaan. Is dus α een imaginaire derdemachtswortel uit de eenheid, dan zullen de drie functies e^{u+v}, $e^{\alpha u+\alpha^2 v}$, $e^{\alpha^2 u+\alpha v}$ de beide differentiaalvergelijkingen bevredigen. Aan de vraag voldoet derhalve het oppervlak

$$x = e^{u+v},\ y = e^{\alpha u+\alpha^2 v},\ z = e^{\alpha^2 u+\alpha v} \text{ d. i. } xyz = 1.$$

Meer algemeen voldoet aan de vraag het oppervlak $xyz = C$, zooals onmiddellijk daaruit volgt, dat men de drie gevonden

functies elk met eene willekeurige constante kan vermenigvuldigen, zonder dat zij ophouden aan de partiëele differentiaalvergelijkingen te voldoen.

3. Ten einde van het oppervlak $xyz = 1$ of

$$x = e^{u+v},\ y = e^{\alpha u + \alpha^2 v},\ z = e^{\alpha^2 u + \alpha v}$$

de kromtelijnen te bepalen, berekene men $E = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$ en $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$.

Men vindt:

$$E = e^{2(u+v)} + \alpha^2 e^{2(\alpha u + \alpha^2 v)} + \alpha e^{2(\alpha^2 u + \alpha v)},$$
$$G = e^{2(u+v)} + \alpha e^{2(\alpha u + \alpha^2 v)} + \alpha^2 e^{2(\alpha^2 u + \alpha v)}.$$

De differentiaalvergelijking

$$E du^2 - G dv^2 = 0$$

kan nu worden geschreven in den vorm $E dE^2 - G dG^2 = 0$.

Immers daar

$$\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial v},\quad \frac{\partial E}{\partial v} = 2G \text{ en } \frac{\partial G}{\partial u} = 2E$$

is, zal men hebben $dG du - dE dv = 2\{E du^2 - G dv^2\}$, doch dit laatste is, wanneer men zich langs de kromtelijnen verplaatst, gelijk aan nul. Derhalve heeft men voor die verplaatsingen $\frac{du}{dE} = \frac{dv}{dG}$ zoodat de vergelijking der kromtelijnen kan worden omgezet in

$$E dE^2 - G dG^2 = 0.$$

De integraal dezer vergelijking is $E^{3/2} \pm G^{3/2} = C$.

De kromtelijnen van het oppervlak worden dus ingesneden door de oppervlakken

$$\{x^2 + \alpha^2 y^2 + \alpha z^2\}^{3/2} \pm \{x^2 + \alpha y^2 + \alpha^2 z^2\}^{3/2} = C.$$

Deze vergelijkingen zijn het eerst door CAYLEY afgeleid. (Zie *Quarterly Journal* X, 111—113).

Vraagstuk LXIV.

L¹ 15 f. Trekt men door elk punt P eener ellips twee rechten l en m, die de groote as onder hoeken snijden, welke gelijk zijn aan den excentrischen hoek van P, dan omhullen deze rech-

ten twee astroïden λ en μ. Welke kromme wordt omhuld door de verbindingslijn der punten, waarin l en m door λ en μ worden aangeraakt? (DR. P. ZEEMAN GZ.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, DR. P. H. SCHOUTE, DR. J. DE VRIES *en* DR. P. ZEEMAN GZ.

Oplossing *van* DR. P. H. SCHOUTE.

1. We toonen eerst aan, dat l en m twee astroïden omhullen.

Zijn P′ en P″ de snijpunten van een rechte door het middelpunt der ellips

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

met de cirkels beschreven op de assen als middellijnen, dan is het snijpunt P der rechten door P′ en P″ evenwijdig met OY in OX getrokken, een punt der ellips.

Als de rechte l door P evenwijdig met OP′ getrokken, OX en OY in A en B snijdt, heeft men AB=PB—PA=P′O—P″O=$a-b$; dus omhult l een astroïde.

Trekt men verder m door P antiparallel met OP′, en zijn C, D de snijpunten dezer rechte met OX en OY, dan is CD = CP + PD = AP + BP = $a+b$, zoodat ook CD een astroïde moet omhullen.

2. Voltooien we de rechthoeken AOBQ en CODR, dan zijn Q en R de onbestendige draaiingspunten van AB en CD, dus de voetpunten L en M der loodlijnen uit Q en R op AB CD de raakpunten met λ en μ. Dan wordt verder de omhullende der lijn LM gevraagd. Uit de gegeven meetkundige beschouwing — of langs den gewonen weg — vindt men voor de coördinaten van L en M

$$(\mathrm{L})\ \left.\begin{aligned} x &= (a-b)\cos^3\phi \\ y &= -(a-b)\sin^3\phi \end{aligned}\right\},\quad (\mathrm{M})\ \left.\begin{aligned} x &= (a+b)\cos^3\phi \\ y &= (a+b)\sin^3\phi \end{aligned}\right\},$$

waar ϕ den excentrischen hoek P′OX van P voorstelt. Dus is

$$ax\sin^3\phi - by\cos^3\phi = (a^2-b^2)\sin^3\phi\cos^3\phi \;.\;.\;.\;.\;.\; 1)$$

de vergelijking van LM. Uit deze vergelijking leiden we de klasse en den graad der verlangde omhullende af.

3. Door 1) te vergelijken met $ux+vy+1=0$, vinden we voor de tangentieele coördinaten van LM

$$u=\frac{a}{c^2\cos^3\phi},\quad v=-\frac{b}{c^2\sin^3\phi}.$$

Eliminatie van ϕ geeft de tangentieele vergelijking der omhullende in den vorm

$$\left(\frac{a}{u}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{v}\right)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}},$$

wat herleid kan worden tot

$$\left\{c^4 - \left(\frac{a}{u}\right)^2 - \left(\frac{b}{v}\right)^2\right\}^3 = 27\,\frac{a^2b^2c^4}{u^2v^2},$$

of

$$(c^4u^2v^2 - a^2v^2 - b^2u^2)^3 = 27\,a^2b^2c^4u^4v^4 \quad \ldots\ldots\ 2)$$

Hieruit volgt, dat de omhullende van de twaalfde klasse is.

4. Door differentiatie volgt uit 1)

$$ax \sin\phi + by \cos\phi = c^2 \sin\phi \cos\phi \cos 2\phi \quad \ldots\ldots\ 3)$$

Uit de vergelijkingen 1) en 3) vinden we

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^5\phi\,,\ y = -\frac{c^2}{b}\sin^5\phi.$$

Dus geeft eliminatie van ϕ voor de vergelijking der omhullende

$$(ax)^{\frac{2}{5}} + (by)^{\frac{2}{5}} = c^{\frac{2}{5}}.$$

Om haar rationaal te kunnen maken, schrijven we haar in in den vorm

$$p^{\frac{1}{5}} + q^{\frac{1}{5}} - 1 = 0.$$

Is nu ε een der onbestaanbare vijfdemachtswortels uit de eenheid en dus $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 0$, dan wordt de laatste vergelijking rationaal gemaakt door vermenigvuldiging met 24 factoren van de gedaante $\varepsilon^k p^{\frac{1}{5}} + \varepsilon^l q^{\frac{1}{5}} - 1$, waarbij, met inbegrip van den oorspronkelijken factor, k en l onafhankelijk van elkaar een der vijf waarden 1, 2, 3, 4, 5 aannemen. Hierdoor ontstaat blijkbaar een vergelijking, die in p en q van den vijfden graad is. Vervangt men p en q door $\frac{a^2x^2}{c^4}$ en $\frac{b^2y^2}{c^4}$ dan blijkt, dat de omhullende van den tienden graad is.

Opmerking. Het punt, waar LM de omhullende raakt, is gemakkelijk te construeeren. Daar OL en OM antiparallel zijn met betrekking tot de assen, is de op LM volgende raak-

lijn der omhullende tevens raaklijn aan de kegelsnee, welke omhuld wordt door de verbindingslijn LM der overeenkomstige punten L en M van de projectieve puntenreeksen, die de paren der met OX antiparallel getrokken stralen OL en OM op AB en CD insnijden. Dus is het gezochte punt tevens het punt waar de lijn LM der figuur de aangeduide kegelsnee raakt. Deze kegelsnee is een parabool; want de oneindig ver gelegen punten van AB en CD zijn overeenkomstige punten der projectieve puntenreeksen. Deze parabool is door de raaklijnen OX, OY, AB, CD bepaald.

Vraagstuk LXV.

M¹ 8 g. Welke bijzonderheid vertoont de kromme $y^n = x^m$ in den oorsprong, en hoe groot is in dat punt de kromtestraal? (m en n zijn geheele onderling ondeelbare getallen en m is grooter dan n).

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

1. Voor $y = px$ wordt $x^{m-n} = p^n$; O is dus een n-voudig punt. Daar verder $p = 0$ tot $x^m = 0$ leidt, worden alle takken door OX aangeraakt.

De onbestaanbare takken buiten beschouwing latende vindt men gemakkelijk de volgende uitkomsten.

1) Is n even en m oneven, dan ligt de kromme in het eerste en vierde quadrant en heeft ze in O een keerpunt.

2) Is n oneven en m even, dan is O een undulatiepunt en de kromme ligt in het eerste en tweede quadrant.

3) Zijn m en n beide oneven, dan is O een buigpunt en en de kromme bevindt zich in het eerste en derde quadrant.

2. In elk geval kan de kromme worden voorgesteld door

$$x = t^n, \; y = t^m.$$

Bijgevolg heeft men voor den kromtestraal

$$\rho = \frac{(n^2 + m^2 t^{2m-2n})\, t^{3n-3}}{mn\,(m-n)\, t^{m+n-3}}.$$

Voor $2n > m$ wordt derhalve de kromtestraal in O gelijk aan nul, voor $2n < m$ wordt hij oneindig groot.

Vraagstuk LXVI.

M² 4 e β, γ. Bepaal de meetkundige plaats van de punten der ruimte, waarvoor de som of het verschil der afstanden tot twee gegeven rechten standvastig is.

Welke stelsels van kegelsneden liggen op het bedoelde oppervlak en welke verschillende vormen kan dit oppervlak hebben?

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. MANTEL, Dr. J. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

1. Een rechthoekig coördinatenstelsel worde zoo aangenomen, dat de vergelijkingen der gegeven rechten l_1 en l_2 kunnen geschreven worden in de vormen:

$$(l_1)\ \begin{cases} z = c \\ y = x \operatorname{tg} \phi, \end{cases} \qquad (l_2)\ \begin{cases} z = -c \\ y = -x \operatorname{tg} \phi. \end{cases}$$

$2c$ is dan de afstand dier rechten, 2ϕ de hoek, dien zij met elkaar maken. Is $P(x, y, z)$ een punt der meetkundige plaats, dan heeft men voor de vierkanten der afstanden van dit punt tot l_1 en l_2:

$$p_1 = (z-c)^2 + (y\cos\phi - x\sin\phi)^2, \quad p_2 = (z+c)^2 + (y\cos\phi + x\sin\phi)^2,$$

en is de vergelijking der meetkundige plaats

$$\pm\sqrt{p_1} \pm \sqrt{p_2} = 2a.$$

Deze vergelijking kan, na herleiding, worden geschreven in een der volgende vormen:

$$\left.\begin{aligned} (p_1 + p_2 - 4a^2)^2 &= 4p_1p_2 \\ (p_1 - p_2 + 4a^2)^2 &= 16a^2p_1 \\ (p_2 - p_1 + 4a^2)^2 &= 16a^2p_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{1)}$$

De gezochte meetkundige plaats is dus een oppervlak van den vierden graad.

Op dit oppervlak liggen, in 't algemeen, zoowel punten, voor welke de som, als zulke voor welke het verschil der afstanden tot l_1 en l_2 gelijk aan $2a$ is. Het is duidelijk, dat punten van de eerste soort alleen zullen voorkomen, wanneer $a \geqq c$ is. Voor $a = c$ zullen die punten, voor welke de som der afstan-

den tot l_1 en l_2 gelijk aan $2a$ is, gelegen zijn op dat deel der as OZ, dat door l_1 en l_2 wordt begrensd, voor de overige punten dier as is het verschil der afstanden tot l_1 en l_2 gelijk aan $2a$.

2. Uit de vergelijkingen 1) vindt men na uitwerking

$$x^2y^2 \sin^2\phi \cos^2\phi + 2cxyz \sin\phi \cos\phi -$$
$$- \{a^2x^2 \sin^2\phi + a^2y^2 \cos^2\phi + b^2z^2\} + a^2b^2 = 0,$$

Elk vlak $x = \lambda$, waarin λ eene willekeurige constante voorstelt, snijdt het oppervlak volgens de dubbel getelde rechte in het oneindige van dat vlak en eene kegelsnede, waarvan de vergelijking is:

$$y^2 \cos^2\phi\,(\lambda^2 \sin^2\phi - a^2) + 2c\lambda yz \sin\phi \cos\phi -$$
$$- b^2z^2 + a^2(b^2 - \lambda^2 \sin^2\phi) = 0.$$

Deze kegelsnede, die voor alle waarden van λ haar middelpunt op de as OX heeft, zal eene ellips of eene hyperbool zijn, naar gelang

$$\lambda^2 \sin^2\phi < b^2 \text{ of } \lambda^2 \sin^2\phi > b^2 \text{ is.}$$

Voor $\lambda^2 \sin^2\phi = b^2$, of $\lambda = \pm \dfrac{b}{\sin\phi}$, gaat de kegelsnede over in twee samenvallende rechten met de vergelijkingen

$$x = \pm \frac{b}{\sin\phi}, \quad bz \mp cy \cos\phi = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; 2)$$

Evenzoo zal elk vlak $y = \lambda$ het oppervlak snijden volgens de dubbel te tellen rechte in het oneindige van dit vlak en de kegelsnede:

$$x^2 \sin^2\phi\,(\lambda^2 \cos^2\phi - a^2) + 2c\lambda zx \sin\phi \cos\phi -$$
$$- b^2z^2 + a^2(b^2 - \lambda^2 \cos^2\phi) = 0.$$

Deze kegelsnede heeft voor alle waarden van λ haar middelpunt op de as OY; zij zal eene ellips of eene hyperbool zijn, naar mate

$$\lambda^2 \cos^2\phi < b^2 \text{ of } \lambda^2 \cos^2\phi > b^2 \text{ is.}$$

Voor $\lambda^2 \cos^2 \phi = b^2$ of $\lambda = \pm \frac{b}{\cos \phi}$, gaat die kegelsnede over in twee samenvallende rechten, welker vergelijkingen zijn

$$y = \pm \frac{b}{\cos \phi}, \quad bz \mp cx \sin \phi = 0 \quad \ldots\ldots \; 3)$$

3. Behalve de oneindig ver gelegen rechten der vlakken YOZ en ZOX, welke dubbellijnen zijn, bevat het oppervlak dus de vier rechten, die door de vergelijkingen 2) en 3) worden bepaald. Zij vormen een scheeven vierhoek, waarvan de hoekpunten op de gegeven rechten l_1 en l_2 zijn gelegen.

Elk van die vier punten is een bijzonder punt op het oppervlak. Neemt men b.v. het punt, waar de rechte $x = \frac{b}{\sin \phi}$, $bz - cy \cos \phi = 0$ de rechte l_1 snijdt, dus het punt met de de coördinaten

$$x = \frac{b}{\sin \phi}, \; y = \frac{b}{\cos \phi}, \; z = c,$$

en stelt men de vergelijking van het oppervlak door $F(x, y, z) = 0$ voor, dan is voor dit punt $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$. Bepaalt men verder de meetkundige plaats der rechten, die in dat punt met het oppervlak eene aanraking van de tweede orde hebben en die in het algemeen wordt voorgesteld door

$$\left\{ (X - x) \frac{\partial}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial}{\partial z} \right\}^{(2)} F = 0,$$

dan vindt men hier

$$\left(X - \frac{b}{\sin \phi}\right)^2 c^2 \sin^2 \phi + \left(Y - \frac{b}{\cos \phi}\right)^2 c^2 \cos^2 \phi + (Z - c)^2 b^2 -$$
$$- 2 \left(Y - \frac{b}{\cos \phi}\right) (Z - c) bc \cos \phi - 2 \left(X - \frac{b}{\sin \phi}\right) (Z - c) b \sin \phi -$$
$$- 2 \left(X - \frac{b}{\sin \phi}\right) \left(Y - \frac{b}{\cos \phi}\right) (a^2 + b^2) \sin \phi \cos \phi = 0.$$

Het beschouwde punt, en evenzoo elk der overige hoekpunten van den scheeven vierhoek, is dus een kegelpunt op het oppervlak [1]).

[1]) Daar de oneindig ver gelegen dubbelrechten samen een dubbelkegelsnede vormen, kan het oppervlak niet meer dan vier kegelpunten bezitten. (Red.)

4. Behalve de boven gevonden reeksen van kegelsneden, waarvan de vlakken achtereenvolgens evenwijdig zijn aan YOZ en ZOX, liggen op het oppervlak nog twee andere reeksen van kegelsneden. Brengt men toch, hetzij door l_1, hetzij door l_2 een vlak, dan zal de doorsnede met het oppervlak een kromme van den vierden graad zijn, die dubbelpunten heeft in de beide op l_1 of l_2 gelegen kegelpunten en in de snijpunten van dit vlak met de oneindig ver gelegen rechten der vlakken YOZ en ZOX. Die kromme moet dus uit twee kegelsneden bestaan. Dit blijkt ook uit de vergelijking van het oppervlak. De vergelijking toch van een willekeurig vlak door de rechte l_1 gaande, is van den vorm

$$z - c = \mu (y \cos \phi - x \sin \phi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Door eliminatie van z tusschen deze vergelijking en die van het oppervlak

$$(p_1 - p_2 + 4a^2)^2 = 16a^2 p_1$$

verkrijgt men

$$\{xy \sin \phi \cos \phi + \mu c (y \cos \phi - x \sin \phi) - b^2\}^2 =$$
$$= a^2 (1 + \mu^2) (y \cos \phi - x \sin \phi)^2.$$

Deze vergelijking, die te splitsen is in

$$xy \sin \phi \cos \phi + (\mu c - a\sqrt{1 + \mu^2}) (y \cos \phi - x \sin \phi) - b^2 = 0$$

en $xy \sin \phi \cos \phi + (\mu c + a\sqrt{1 + \mu^2}) (y \cos \phi - x \sin \phi) - b^2 = 0,$

stelt twee hyperbolische cylinders voor, waarvan de beschrijvende lijnen evenwijdig loopen met OZ. De beide hyperbolen, volgens welke het vlak 4) deze cylinders snijdt, liggen op het oppervlak.

Elk vlak door l_1, en evenzoo elk vlak door l_2 snijdt dus het oppervlak volgens twee hyperbolen. Alleen in het geval dat het door l_1 of l_2 gebrachte vlak twee zijden van den boven gevonden, op het oppervlak liggenden scheeven vierhoek bevat, zal een dier hyperbolen in twee rechten ontaarden.

5. Uit het voorgaande laten zich nu gemakkelijk de verschillende vormen van het oppervlak afleiden. Nemen wij, zooals in het voorgaande gedaan is, $a > c$ dus b^2 positief, dan zal de op het oppervlak gelegen scheeve vierhoek zich op het vlak XOY projecteeren als een rechthoek, welks zijden even-

wijdig zijn aan de assen OX en OY. Reëele punten van het oppervlak projecteeren zich op XOY alleen binnen dien rechthoek en op de zich in het oneindige uitstrekkende deelen van XOY, die elk begrensd worden door de verlengden van twee zijden. Het deel, dat zich binnen den rechthoek projecteert, is de meetkundige plaats der punten voor welke de som der afstanden tot l_1 en l_2 constant is, terwijl op de overige deelen, die met dat eerste alleen in de vier kegelpunten samenhangen, de punten der ruimte liggen voor welke het verschil der afstanden tot l_1 en l_2 constant is. Het eerste deel wordt door elk vlak, evenwijdig aan YOZ of ZOX, volgens eene ellips, de overige deelen worden door die vlakken volgens hyperbolen gesneden.

Neemt a af, zoodat b tot nul nadert, dan zal het eerste deel steeds kleiner worden. Voor $b = 0$ gaat het over in het stuk der as OZ, dat tusschen l_1 en l_2 begrepen is; de vier ribben van den scheeven vierhoek vallen allen met de as OZ samen, welke dan evenals de beide rechten in het oneindige der vlakken YOZ en ZOX een dubbellijn van het oppervlak zal wezen. Het oneindig ver gelegen punt van OZ is dus een drievoudig punt, zoodat men hier een oppervlak van STEINER vindt. De vier kegelpunten gaan, zooals onmiddellijk uit de vergelijking is af te leiden, over in twee klempunten in de snijpunten van OZ met l_1 en l_2. Het tusschen l_1 en l_2 gelegen deel der as OZ zal eene geïsoleerde rechte op het oppervlak zijn.

Alle vlakken evenwijdig aan YOZ of ZOX snijden het oppervlak volgens hyperbolen. Evenzoo snijdt elk vlak door l_1 (of l_2) het oppervlak volgens twee hyperbolen, die elkander aanraken in het op die rechte gelegen klempunt.

Is eindelijk $a < c$ of b^2 negatief, dan liggen op het oppervlak alleen punten, voor welke het verschil der afstanden tot l_1 en l_2 gelijk is aan $2a$. Ook dan snijden alle vlakken evenwijdig aan YOZ of ZOX het oppervlak volgens hyperbolen, terwijl de vlakken door l_1 (of l_2) elk het oppervlak snijden volgens twee hyperbolen, die geen in het eindige gelegen reëele punten gemeen hebben. Reëele kegel- of klempunten heeft het oppervlak in dat geval niet. Het bestaat dan uit twee bladen, die in het eindige geen reëele punten gemeen hebben.

Vraagstuk LXVII.

Q 4 a. Bewijs dat twee viervlakken van MÖBIUS op niet meer dan negen verschillende wijzen hyperboloïdisch kunnen liggen.

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

1. Volgens bepaling liggen twee viervlakken hyperboloïdisch als vier elkaar kruisende rechten, die elk een hoekpunt van het eene met een hoekpunt van het andere verbinden, vier beschrijvenden van een kwadratisch regelvlak vormen.

Uit deze bepaling volgt, dat twee viervlakken van MÖBIUS minstens op drie verschillende wijzen hyperboloïdische ligging hebben. Neemt men toch uit elk der vier paren overeenkomstige hoekpunten AA′, BB′, CC′, DD′ er een, dan zal men steeds met vier in een vlak gelegen punten te doen hebben, als men er voor zorgt, dat onder deze een oneven aantal geaccentueerden voorkomt; want elk hoekpunt van het eene viervlak ligt in het zijvlak van het andere, dat tegenover het overeenkomstige hoekpunt gelegen is. Langs dezen weg bewijst men, dat de drie paren

AB	AB′	AC	AC′	AD	AD′
A′B′	BA′	A′C′	CA′	A′D′	DA′
CD	CD′	BD	BD′	BC	BC′
C′D′	DC′	B′D′	DB′	B′C′	CB′

van lijnenviertallen hyperboloïdische ligging hebben; want in elk paar viertallen rusten de lijnen van het eene paar op die van het andere en elk van beide viertallen bestaat uit kruisende lijnen. En nu is het duidelijk, dat van elk viertal alleen het tweede lijnen bevat, die een hoekpunt van het eene viervlak met een hoekpunt van het tweede viervlak verbinden.

2. De vraag rijst nu, of er nog andere wijzen van hyperboloïdische ligging mogelijk zijn.

Het aantal verschillende manieren, waarop men de vier punten A, B, C, D één aan één met de vier punten A′, B′, C′, D′ verbinden kan, is natuurlijk gelijk aan het aantal permutaties

van vier elementen en dus 24; zij zijn tot verschillende typen terug te brengen. In het volgende schema zijn deze typen met het aantal er in begrepen viertallen aangewezen.

1	6	3	8	6
AA′	AA′	AB′	AA′	AB′
BB′	BB′	BA′	BC′	BC′
CC′	CD′	CD′	CD′	CD′
DD′	DC′	DC′	DB′	DA′

We behandelen deze typen, die we achtereenvolgens met de de cijfers I—V aanduiden, afzonderlijk.

Type I. Als AA′, BB′, CC′, DD′ hyperboloïdische ligging hebben, is er door A een lijn te trekken, die op BB′, CC′, DD′ rust, en moeten dus de projecties BB_0, CC_0, DD_0 van BB′, CC′, DD′ uit A op BCD door een punt gaan. Doch dit doen ze blijkbaar niet, omdat A, B′, C′, D′ in een vlak liggen en de projecties B_0, C_0, D_0 van B′, C′, D′ uit A op BCD dus de snijpunten zijn van een rechte met de zijden CD, DB, BC van driehoek BCD. Dus is dit geval onmogelijk.

Type II. Deze zes gevallen zijn allen mogelijk. Want men verwezenlijkt ze onder anderen door van een willekeurig viervlak ABCD uit te gaan, voor A′ het zwaartepunt van driehoek BCD en AB′, AC′, AD′ achtereenvolgens equipollent met CD, DB, BC te nemen.

Zeer duidelijk wordt dit, als men voor ABCD een regelmatig viervlak kiest. Dan is de orthogonale projectie van B′C′D′ op het vlak BCD een om BCD beschreven regelmatige driehoek, waarvan de zijden B′C′, C′D′, D′B′ achtereenvolgens loodrecht staan op BC, CD, DB. En daar blijkbaar de loodlijn, uit C′ op BCD gesneden wordt door AA′, BB′, CD′ en DC′, vormen deze vier rechten een hyperboloïdisch quadrupel.

Daar verder CD evenwijdig loopt met AB′ en gesneden wordt door BA′, CC′ en DD′, liggen ook de laatste vier rechten hyperboloïdisch. De overige vier hyperboloïdische quadrupels van dit type vindt men door als transversalen te beschouwen de loodlijnen uit B′ en D′ op BCD en de rechten BC, BD.

We zoeken het meest algemeene geval der negen hyperboloïdische lijnenviertallen en gaan daartoe uit van het viertal CC′, DD′, AB′, A′B, waarvan we dadelijk de transversalen

CD en C'D' kennen. Dit viervlak heeft de bedoelde ligging zoodra de vlakken ACC', ADD', AA'B door eenzelfde lijn gaan, of, in de aangenomen notatie, zoodra de lijnen CC_0, DD_0, A'B door een punt gaan. Op dezelfde wijze blijkt, dat de hyperboloïdische ligging der beide viertallen DD', BB', AC', A'C en BB', CC', AD', A'D staat of valt met het al of niet door een punt gaan van de lijnendrietallen DD_0, BB_0, A'C en BB_0, CC_0, A'D.

Anders gezegd: duidt men de tegenover BB_0, CC_0, DD_0 gelegen hoekpunten van den door deze lijnen gevormden driehoek door β, γ, δ aan, dan zijn de driehoeken BCD en $\beta\gamma\delta$ perspectief gelegen, omdat de overeenkomstige zijdenparen elkaar in de punten B_0, C_0, D_0 eener rechte lijn snijden. Dus gaan de verbindingslijnen $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ door een zelfde punt; dit punt moet A' zijn.

Of nog anders: de snijlijn $B_0C_0D_0$ van de vlakken BCD en B'C'D' is de harmonische poollijn van A' met betrekking tot BCD — dus ook van A met betrekking tot B'C'D'. Door op dit algemeene geval eene projectieve transformatie toe te passen, waarbij de snijlijn van de vlakken BCD en B'C'D' in het oneindige verdwijnt, vindt men het bijzondere geval terug, dat boven vermeld werd.

Type III. Deze drie gevallen zijn volgens 1. een onmiddellijk gevolg van de eigenaardige ligging van twee viervlakken van Möbius ten opzichte van elkaar.

Type IV. Als AA', BC', CD', DB' hyperboloïdische ligging hebben, moeten BC_0, CD_0, DB_0 door een punt gaan. Dit doen ze echter blijkbaar niet; want BC_0, CD_0, DB_0 zijn de drie zijden van driehoek BCD.

Type V. Als AB', BC', CD', DA' hyperboloïsche ligging hebben, moeten BC_0, CD_0 en DA' of BD, BC, DA' door een punt gaan en A' dus op BD liggen, wat ten gevolge heeft dat DA' en BC' elkaar snijden en de vier lijnen dus geen kruisende lijnen zijn.

Alles saamgenomen blijkt, dat naast de steeds voorkomende drie gevallen van type III alleen de zes gevallen van type II mogelijk zijn. Hiermee is het gestelde bewezen.

3. Opmerking. Laat men onder de lijnenviertallen ook ribben toe en zoekt men dus het aantal malen, waarop men de acht hoekpunten twee aan twee door een hyperboloïdisch

quadrupel vereenigen kan, dan vindt men 7. 5. 3. 1 = 105 gevallen en dus behalve de reeds beschouwde nog 81 nieuwe. In typen ingedeeld, worden deze voorgesteld door het schema

6	6	3	6	24	24	12
AB	AB	AB	AB	AB	AB	AB
A'B'	A'B'	A'B'	CD	A'C	A'C	A'C
CC'	CD'	CD	A'C'	B'C'	C'D	B'D
DD'	C'D	C'D'	B'D'	DD'	B'D'	C'D'

We behandelen ook deze afzonderlijk als type VI—XII.

Type VI. Van AB, A'B', CC', DD' zijn CD' en C'D klaarblijkelijk transversalen. Dus hebben deze vier lijnen hyperboloïdische ligging als er door A een lijn te trekken is, die op A'B', CC', DD' rust, d. i. als CC_0, DD_0, $A'B_0$ door eenzelfde punt gaan. Dit is natuurlijk mogelijk. Doch het is niet mogelijk, dat alle zes gevallen voorkomen; want $\beta\gamma\delta$ en $B_0C_0D_0$ kunnen niet perspectief liggen, daar $B_0C_0D_0$ een rechte lijn is.

Als de zes gevallen van type II zich voordoen is elk geval van type VI onmogelijk; want A' kan niet tegelijkertijd op βB en βB_0 liggen, enz.

Type VII. De viertallen zijn geen kruisende lijnen, want AB en CD' snijden elkaar even als A'B' en C'D.

Type VIII. Deze drie gevallen doen zich steeds voor.

Type IX. Liggen AB, CD, A'C', B'D' hyperboloïdisch, dan moeten de lijnen CD, A_1C_0, B_0D_0 door een punt gaan en A_1C_0 dus het snijpunt B_0 der andere beide lijnen bevatten, wat vereischt dat A_1 op $B_0C_0D_0$ ligt. Deze gevallen zijn dus onmogelijk.

Type X. Willen AB, A'C, B'C', DD' hyperboloïdisch liggen, dan moeten $A'C_0$, B_0C_0, DD_0 door een punt gaan, wat weer vereischt dat A_1 op $B_0C_0D_0$ ligt, enz.

Type XI. Geen kruisende lijnen.

Type XII. Door behandeling als onder IX en X blijkt de onmogelijkheid.

Opmerkingen van Dr. P. Zeeman Gz. I. Men kan als volgt aantoonen, dat van de viertallen van type II òf *twee* òf *alle* hyperboloïdisch kunnen zijn.

Zal dit gelden voor AA′, BB′, CD′, DC′, dan moet de dubbelverhouding der punten

$$A, B, (AB, CD'), (AB, DC') \ldots\ldots\ldots (a)$$

gelijk zijn aan de dubbelverhouding der punten

$$A', B', (A'B', CD'), (A'B', DC') \ldots\ldots (b)$$

Daar de rechten AB′, BA′, CD′, DC′ steeds hyperboloïdisch liggen, is verder de dubbelverhouding der punten (*a*) even groot als die der punten

$$B', A', (A'B', C'D'), (A'B', DC') \ldots\ldots (c)$$

Bijgevolg zijn de dubbelverhoudingen der viertallen (*b*) en (*c*) gelijk, d. w. z. A′ en B′ worden harmonisch gescheiden door (A′B′, CD′) en (A′B′, DC′). Natuurlijk vormen de punten (*a*) dan tevens een harmonische groep.

Is aan deze voorwaarde voldaan, dan hebben ook

$$AB', BA', CC', DD'$$

hyperboloïdische ligging. Immers (zie vraagstuk 200 van deel VII), wanneer

$$AA', CD', BB', DC' \text{ en } AD', CB', BC', DA' \text{ (type III)}$$

zoodanige ligging hebben, geldt dit tevens voor de viertallen

$$AB', CC', BA', DD' \text{ en } AC', CA', BD', DB' \text{ (type III)}.$$

Wil men nu, dat ook AA′, BD′, CC′, DB′ hyperboloïdisch zal zijn, dan moeten de punten A en C harmonisch gescheiden worden door (AC, BD′) en (AC, DB′). Is dit het geval, dan zijn ook de overige drie viertallen van type II hyperboloïdisch. Want hebben

$$AA', BB', CD', DC' \text{ en } AA', BD', CC', DB'$$

de bedoelde ligging, dan zal dit ook het geval zijn met

$$AA', BC', CB', DD',$$

(Zie vraagstuk 199 van deel VII) enz.

Alles samenvattende, kan men dus zeggen: *Twee viervlakken van* Möbius *hebben òf op* drie, *òf op* vijf, *òf op* negen *verschillende wijzen hyperboloïdische ligging.*

II. Om twee viervlakken met vijfvoudige hyperboloïdische

ligging te verkrijgen, neme men ABCD willekeurig, en kieze in ABC en ABD de punten D′ en C′ zoo, dat A en B harmonisch zijn met (AB, CD′) en (AB, DC′). De punten A′ en B′ kunnen dan volgens een bekende, eenvoudige constructie op ∞^1 verschillende wijzen bepaald worden (STEINER, Ges. Werke, I, 405).

Vraagstuk LXVIII.

M³ 5 h. Op een omwentelingshyperboloïde neemt men drie rechten a, b, c van hetzelfde stelsel, die den keelcirkel in de hoekpunten A, B, C van een gelijkzijdigen driehoek snijden. De kubische ruimtekromme, welke in A, B, C door a, b, c wordt aangeraakt, wordt door elk vlak evenwijdig aan den keelcirkel in de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek gesneden. De meetkundige plaats der middelpunten van de kegelsneden, volgens welke het ontwikkelbare oppervlak der raaklijnen door de osculatievlakken wordt gesneden, is een in het vlak van den keelcirkel gelegen cirkel. Men vraagt dit te bewijzen. (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

1. De kubische ruimtekromme, die in de punten A, B en C door de rechten a, b en c wordt aangeraakt, is door deze gegevens volkomen bepaald. Geeft men haar om de as der omwentelings-hyperboloïde eene wenteling met amplitude $\frac{2\pi}{3}$, dan zullen daardoor de punten A, B, C, benevens de rechten a, b en c, in de nieuwe standen B, C, A, b, c en a komen. De oorspronkelijke ruimtekromme gaat door deze wenteling over in eene ruimtekromme, die in A, B en C door a, b en c wordt aangeraakt, d. w. z. de nieuwe stand der ruimtekromme valt met den oorspronkelijken samen. Evenzoo zal door een wenteling, in denzelfden zin als de vorige, doch met de amplitude $\frac{4\pi}{3}$, de kromme een stand verkrijgen, waarin zij weer met den oorspronkelijken stand samenvalt.

2. Hieruit laten zich een aantal zeer eenvoudige eigenschappen dier kubische ruimtekromme afleiden. Vooreerst blijkt

dat zij moet bestaan uit drie congruente takken, die door de beide wentelingen met elkaar verwisseld worden. Elk vlak, loodrecht op de as der hyperboloïde snijdt de kromme in drie punten, die door de wentelingen in elkaar overgaan, dus de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek zijn. De kromme is een kubische hyperbool met drie asymptoten, welke gelijke hoeken maken met en op gelijke afstanden verwijderd zijn van de as der omwentelingshyperboloïde.

3. De beide, boven beschouwde wentelingen zijn niet de eenige bewegingen, die men aan de kromme kan geven, zoodanig dat zij in den nieuwen stand met den oorspronkelijken samenvalt. Is toch O het centrum der omwentelingshyperboloïde, dan zal een wenteling om OA, waarvan de amplitude gelijk aan π is, het punt A op zijn plaats laten en B met C verwisselen, terwijl de rechte a in den nieuwen stand met den eersten samenvalt en de beide rechten b en c met elkander worden verwisseld; de kubische ruimtekromme zal dus in den nieuwen stand met den oorspronkelijken samenvallen. Hetzelfde vindt plaats, wanneer men de kromme om OB of om OC een hoek π laat wentelen.

4. Volgens bekende eigenschappen wordt elk osculatievlak eener kubische ruimtekromme door de overige osculatievlakken gesneden volgens de raaklijnen eener kegelsnede, en liggen de middelpunten dezer kegelsneden weer op een kegelsnede.

Het vlak der laatste kegelsnede moet bij de beschouwde bijzondere kubische ruimtekromme, omdat het door de wentelingen om de as der hyperboloïde niet van stand verandert, loodrecht op die as staan; verder moet die kegelsnede, daar zij deze beide wentelingen toelaat, een cirkel zijn. Eindelijk moet nog, omdat die cirkel de wentelingen om de drie, in het vlak van den keelcirkel gelegen, rechten OA, OB en OC toelaat, zijn vlak samenvallen met het vlak van den keelcirkel.

Vraagstuk LXIX.

M³ 6 i. Onderzoek de ruimtekromme:

$$x = a \cos \varphi : \cos n\varphi$$
$$y = a \sin \varphi : \cos n\varphi$$
$$z = b \operatorname{tg} n\varphi$$

als n een geheel getal voorstelt. (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing van Dr. P. ZEEMAN Gz.

1. De kromme ligt op de omwentelingshyperboloïde

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Voor $n=1$ gaat zij over in de rechte: $x=a$, $by-az=0$.

De snijpunten der kromme met een vlak $z=\lambda$ zijn de hoekpunten van een regelmatigen n- of $2n$hoek. Het eerste geval doet zich voor als n oneven, het tweede als n even is.

Vooreerst toch liggen deze punten op den cirkel, volgens welken dit vlak de omwentelingshyperboloïde snijdt; verder is voor al die punten $\operatorname{tg} n\phi=\frac{\lambda}{b}$. Is nu α de, tusschen 0 en π gelegen waarde van $n\phi$, die aan deze vergelijking voldoet, dan vindt men alle in het vlak $z=\lambda$ gelegen punten der kromme door te nemen $\phi=\frac{\alpha+k\pi}{n}$, waarin k alle waarden van 0 tot $2n-1$ kan hebben.

De beide waarden van ϕ, welke overeenkomen met twee waarden van k, waarvan het verschil gelijk is aan n, b.v.

$$\phi_1=\frac{\alpha+k_1\pi}{n},\quad \phi_2=\frac{\alpha+k_1\pi}{n}+\pi \qquad (k_1<n)$$

geven de beide punten

$$x_1=a\frac{\cos\frac{\alpha+k_1\pi}{n}}{\cos(\alpha+k_1\pi)},\quad y_1=a\frac{\sin\frac{\alpha+k_1\pi}{n}}{\cos(\alpha+k_1\pi)},\quad z_1=b\operatorname{tg}\alpha=\lambda.$$

$$x_2=a\frac{-\cos\frac{\alpha+k_1\pi}{n}}{\cos(\alpha+k_1\pi+n\pi)},\quad y_2=a\frac{-\sin\frac{\alpha+k_1\pi}{n}}{\cos(\alpha+k_1\pi+n\pi)},\quad z_2=b\operatorname{tg}\alpha=\lambda.$$

Is nu n oneven, dan wordt $\cos(\alpha+k_1\pi+n\pi)=-\cos(\alpha+k_1\pi)$; in dat geval vallen dus deze beide punten samen, zoodat de bovenstaande $2n$ waarden slechts n verschillende, in het vlak $z=\lambda$ gelegen, punten der kromme opleveren.

Is daarentegen n even, dan vallen die twee punten niet samen, maar liggen in de uiteinden eener zelfde middellijn van den cirkel; de $2n$ verschillende waarden voor ϕ leveren dan

ook $2n$ verschillende punten der kromme. Dat die in het vlak $z = \lambda$ gelegen n of $2n$ punten de hoekpunten van een regelmatigen veelhoek zijn, volgt onmiddellijk uit de vormen, die men, blijkens het voorgaande, voor de coördinaten dier punten verkrijgt. En tevens blijkt daaruit, dat wanneer men aan de kromme eene rotatie geeft om de as OZ, waarvan de amplitude is $\frac{\pi}{n}$ of $\frac{2\pi}{n}$ (al naar mate n even of oneven is), zij een nieuwen stand zal verkrijgen, in welken zij met den oorspronkelijken stand samenvalt. De kromme bestaat dus uit $2n$ of n congruente takken en zal van de $2n^e$ of n^e orde zijn.

2. Deze rotaties zijn niet de eenige bewegingen, die men aan de kromme kan geven, om haar te brengen in een nieuwen stand, in welken zij met den oorspronkelijken samenvalt. Voor twee punten der kromme, die bij gelijke, doch in teeken tegengestelde waarden van ϕ behooren, is $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$, $z_1 = -z_2$, de kromme is dus symmetrisch t. o. v. de as OX. Geeft men haar eene wenteling, groot 180° om de as OX, dan valt de nieuwe stand der kromme met den eersten samen. Hetzelfde is het geval, wanneer men de kromme om eene der middellijnen van den keelcirkel der omwentelingshyperboloïde, die door een in dat vlak gelegen punt der kromme gaat, een hoek van 180° laat wentelen.

Voor $n = 3$ verkrijgt men de in het voorgaande vraagstuk besproken kromme.

3. De vergelijking van het osculatievlak der kromme in het punt ϕ is

$$nb\mathrm{X} \sin \phi - nb\mathrm{Y} \cos \phi + a\mathrm{Z} \cos n\phi - ab \sin n\phi = 0.$$

Omdat dit vlak het punt $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = b \operatorname{tg} n\phi$ bevat, zullen de osculatievlakken in de verschillende punten, welke een vlak, evenwijdig aan XOY, met de kromme gemeen heeft, allen gaan door het punt, waar dit vlak de as OZ snijdt. Dit volgt ook onmiddellijk uit de bovengenoemde rotaties om OZ, welke de kromme toelaat.

4. Deze eigenschap is slechts een bijzonder geval eener meer algemeene. Vervangt men, in de vergelijking van het osculatie-

vlak, den parameter ϕ door de coördinaten $x = a \frac{\cos \phi}{\cos n\phi}$, $y = a \frac{\sin \phi}{\cos n\phi}$, $z = b \operatorname{tg} n\phi$ van het punt, waar dit vlak osculeert, dan verkrijgt men:

$$Xy - Yx + \frac{a^2}{nb}(Z - z) = 0.$$

Door deze vergelijking wordt, wanneer men x, y en z als de coördinaten van een willekeurig punt der ruimte beschouwt, eene reciproke verwantschap tusschen de punten en vlakken der ruimte bepaald, zoodanig dat met elk punt x, y, z der ruimte één vlak overeenstemt, dat door dit punt gaat, terwijl als het punt eene rechte doorloopt, het overeenkomstige vlak om eene andere rechte zal draaien, m. a. w. door die vergelijking wordt een nulstelsel bepaald.

De beschouwde ruimtekromme is nu eene kromme van dit nulstelsel d. w. z. aan elk punt dier kromme is in het nulstelsel het osculatievlak van dat punt toegevoegd. Daar nu, als een punt een zeker vlak α doorloopt, het met dit punt overeenkomende vlak door een vast punt A van α gaat, bezit de bedoelde ruimtekromme deze eigenschap:

„Elk vlak snijdt de ruimtekromme in $2n$ of n punten, die gelegen zijn op de kegelsnede, welke dit vlak met de bovengenoemde hyperboloïde gemeen heeft. De osculatievlakken der kromme in die punten gaan allen door een zelfde punt van het vlak. Door elk punt P der ruimte gaan $2n$ of n osculatievlakken; de punten der kromme, waar deze vlakken osculeeren, liggen in een vlak door P."

Het laatste, nl. dat bij deze kromme, evenals bij elke kromme van een nulstelsel, orde en klasse even groot zijn, volgt hieruit, dat zulke krommen ten opzichte van het nulstelsel met zich zelf reciprook zijn.

5. De volgende eigenschappen der ruimtekromme kunnen gemakkelijk afgeleid worden.

„De rechten van het eene stelsel der omwentelingshyperboloïde $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ hebben, als n even is, met de kromme $n + 1$,

die van het andere stelsel $n-1$ punten gemeen. Is n oneven, dan worden deze aantallen $\frac{n+1}{2}$ en $\frac{n-1}{2}$."

„De kromme heeft $2n$ of n asymptoten, die gelegen zijn op de omwentelingshyperboloïde

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=\frac{1}{n^2}."$$

„De asymptotische vlakken der kromme zijn raakvlakken dier hyperboloïde, in punten op den keelcirkel gelegen. Is n even, dan loopen de asymptotische vlakken twee aan twee evenwijdig."

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

1. We maken het vraagstuk een weinig algemeener door de gegeven vergelijkingen te vervangen door

$$\frac{x}{a\cos\phi}=\frac{y}{b\sin\phi}=\frac{z}{c\sin n\phi}=\frac{1}{\cos n\phi}\ldots\ldots\ldots 1)$$

en bewijzen nu achtereenvolgens, dat de door deze vergelijkingen voorgestelde ruimtekromme van graad en klasse $2n$ is voor n even en van graad en klasse n voor n oneven.

2. Voor de gewijzigde vergelijkingen kunnen we schrijven

$$\frac{x}{a(e^{i\phi}+e^{-i\phi})}=\frac{y}{-bi(e^{i\phi}-e^{-i\phi})}=\frac{z}{-ci(e^{ni\phi}-e^{-ni\phi})}=\frac{1}{e^{ni\phi}+e^{-ni\phi}}$$

of, als $e^{i\phi}=t$ gesteld wordt,

$$\frac{x}{a(t^2+1)t^{n-1}}=\frac{y}{-bi(t^2-1)t^{n-1}}=\frac{z}{-ci(t^{2n}-1)}=\frac{1}{t^{2n}+1}.$$

Is n oneven dan komen in de noemers slechts even machten van t voor en kunnen we t^2 door u vervangen. Daar de noemers dan hoogstens tot den n^{den} graad in u opklimmen, is de kromme rationaal en van den n^{den} graad. Is n even, dan is de vereenvoudigende substitutie niet mogelijk; omdat de noemers tot den graad $2n$ in t opklimmen, is de kromme dan rationaal en van den graad $2n$.

3. Het osculatievlak in het punt behoorende bij de waarde ϕ wordt voorgesteld door

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a\cos\phi & b\sin\phi & c\sin n\phi & \cos n\phi \\ -a\sin\phi & b\cos\phi & nc\cos n\phi & -n\sin n\phi \\ -a\cos\phi & -b\sin\phi & -n^2c\sin n\phi & -n^2\cos n\phi \end{vmatrix} = 0,$$

of door

$$n\left(\frac{x}{a}\sin\phi - \frac{y}{b}\cos\phi\right) + \frac{z}{c}\cos n\phi - \sin n\phi = 0.$$

Brengen we dit overeen met de vergelijking $ux + vy + wz + 1 = 0$, die het verband tusschen tangentiëele en puntcoördinaten aangeeft, dan vinden we

$$\frac{u}{\frac{n}{a}\sin\phi} = \frac{v}{-\frac{n}{b}\cos\phi} = \frac{w}{\frac{1}{c}\cos n\phi} = \frac{1}{-\sin n\phi},$$

wat in hoofdzaak overeenstemt met 1). Langs den aangegeven weg vindt men dus voor de klasse der kromme n of $2n$, naarmate n oneven of even is.

4. Gemakkelijk blijkt, dat de beschouwde ruimtekromme gelegen is op de eenbladige hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ en dat het ontwikkelbaar oppervlak, waarvan zij de keerlijn is, de eenbladige hyperboloïde $a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = n^2$ of $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{n^2}$ omhult. Voor $n = 1$ vallen deze beide oppervlakken samen; de vergelijkingen 1) stellen dan een rechte voor.

5. Voor $n = 3$ wijzen de oorspronkelijk gegeven vergelijkingen de kromme van het voorgaande vraagstuk aan. In verband hiermee merken we op, dat de oorspronkelijke kromme voor elke $n > 2$ door alle vlakken evenwijdig aan het vlak XOY volgens de hoekpunten van een regelmatigen veelhoek gesneden wordt en dus voor n oneven uit n, voor n even uit $2n$ congruente takken bestaat, die bij draaiing om de z-as in elkaar overgaan. De kromme is anallagmatisch voor een diëder groep met de z-as tot hoofdas en n of $2n$ bijassen in het vlak $z = 0$.

Vraagstuk LXX.

M³ 5 h. Door elk van drie kruisende ribben van een rechthoekig parallelopipedum brengt men de beide vlakken, welke den oneindig ver gelegen imaginairen cirkel aanraken. Bepaal de kubische ruimtekromme, die door deze zes vlakken geosculeerd wordt.

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

1. Volgens eene bekende eigenschap bepalen de osculatievlakken eener kubische ruimtekromme projectieve puntenreeksen op twee rechten l_1 en l_2, door elk van welke twee osculatievlakken der kromme gaan. Projecteert men dus die beide puntenreeksen uit een derde rechte, die eveneens de doorsnede van twee osculatievlakken is, dan verkrijgt men twee projectieve vlakkenbundels, van welke de door l_3 gaande osculatievlakken de dubbelvlakken zijn.

Zijn nu l_1, l_2 en l_3 de gegeven ribben van het rechthoekige parallelopipedum, dan bepalen dus de osculatievlakken der gezochte ruimtekromme op l_1 en l_2 twee projectieve puntenreeksen, die uit l_3 door twee projectieve vlakkenbundels worden geprojecteerd. Van deze bundels zijn de door l_3 gaande osculatievlakken, d.z. die vlakken door l_1, die den imaginairen cirkel in 't oneindige raken, de dubbelvlakken. Doch dan moet de hoek, door twee homologe vlakken dier bundels gevormd, constant wezen. Omdat dit voor elk der drie vlakken geldt, heeft men:

Snijdt een willekeurig osculatievlak der gezochte kromme elk der drie gegeven ribben in een punt, dan zullen de drie tweevlakkenhoeken, die men verkrijgt, als men vlakken brengt door elk dier ribben en elk der punten op de beide andere ribben, constant zijn d. i. onafhankelijk van het aangenomen osculatievlak.

Daaruit volgt een zeer eenvoudige constructie van alle reëele osculatievlakken der kromme, wanneer men slechts één dergelijk vlak kent.

2. Om een osculatievlak der kromme te bepalen, nemen wij het middelpunt O van het parallelopipedum tot oorsprong en tot coördinaatassen drie rechten OX, OY en OZ evenwijdig aan de gegeven ribben. Deze hebben dan tot vergelijkingen

$$(l_1)\ \left.\begin{matrix} y=b, \\ z=-c, \end{matrix}\right\}\quad (l_2)\ \left.\begin{matrix} z=c, \\ x=-a, \end{matrix}\right\}\quad (l_3)\ \left.\begin{matrix} x=a, \\ y=-b. \end{matrix}\right\}$$

Op l_1 worde een punt $x=\lambda_1$, op l_2 een punt $y=\lambda_2$ en op l_3 een punt $z=\lambda_3$ aangenomen. Het vlak door die punten heeft tot vergelijking:

$$X(\lambda_2\lambda_3 - b\lambda_3 + c\lambda_2 + 3bc) + Y(\lambda_3\lambda_1 - c\lambda_1 + a\lambda_3 + 3ca) +$$
$$+ Z(\lambda_1\lambda_2 - a\lambda_2 + b\lambda_1 + 3ab) - (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + bc\lambda_1 + ca\lambda_2 + ab\lambda_3) = 0 \ldots 1)$$

Zal dit vlak osculatievlak der kubische ruimtekromme zijn, dan moeten de door λ_1, λ_2 en λ_3 op de ribben doorloopen puntenreeksen, volgens het voorgaande, projectief wezen, der halve moeten twee betrekkingen bestaan van den vorm:

$$\left.\begin{matrix} \lambda_2\lambda_3 + A_1\lambda_2 + B_1\lambda_3 + C_1 = 0, \\ \lambda_3\lambda_1 + A_2\lambda_3 + B_2\lambda_1 + C_2 = 0 \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots 2)$$

Zes van de osculatievlakken der kromme zijn bekend en deze stellen ons in staat de in deze betrekkingen voorkomende coëfficienten te bepalen.

Vooreerst zijn de beide vlakken door l_1, welke den imaginairen cirkel in het oneindige raken, osculatievlakken der kromme; die vlakken hebben tot vergelijkingen:

$$Y - b \pm i(Z + c) = 0.$$

Als $\lambda_2 = b \pm 2ic$ is, zal $\lambda_3 = -c \pm 2ib$ zijn. Evenzoo vindt men, door uit te gaan van de beide vlakken door l_2, die den imaginairen cirkel aanraken en tot vergelijkingen hebben

$$Z - c \pm i(X + a) = 0,$$

dat als $\lambda_3 = c \pm 2ia$ is, $\lambda_1 = -a \pm 2ic$ zal zijn, terwijl men eindelijk met behulp van de beide imaginaire osculatievlakken door l_3 vindt dat uit $\lambda_1 = a \pm 2ib$ volgt $\lambda_2 = -b \pm 2ia$.

Door substitutie van deze waarden in de vergelijkingen 1) vindt men tusschen de onbekende coëfficienten de volgende zes betrekkingen:

$$A_1 b - B_1 c + C_1 = 5bc,$$
$$A_1 c + B_1 b \quad = c^2 - b^2,$$
$$A_2 b - B_2 c + C_2 = 5ca,$$
$$A_2 c + B_2 b \quad = a^2 - c^2,$$
$$-5ab(A_1 - B_2) + a(C_1 - B_1 B_2) - b(A_1 A_2 - C_2) + A_2 C_1 - B_1 C_2 = 0,$$
$$(a^2 - b^2)(A_1 - B_2) + b(C_1 - B_1 B_2) + a(A_1 A_2 - C_2) \quad = 0.$$

Hieruit vindt men:

$$A_1 = c - \frac{8a^2b^2c}{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)},$$
$$B_1 = -b + \frac{8a^2bc^2}{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)},$$
$$C_1 = 3bc + \frac{8a^2bc(b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}.$$

De waarden van A_2, B_2 en C_2 worden hieruit verkregen door cyclische permutatie van a, b en c.

Als resultaat van het voorgaande hebben wij dus:

De vergelijking 1) waar de parameters λ_1, λ_2 en λ_3 verbonden zijn door de betrekkingen

$$(\lambda_2\lambda_3 + c\lambda_2 - b\lambda_3 + 3bc) -$$
$$- \frac{8a^2bc}{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}(b\lambda_2 - c\lambda_3 - (b^2+c^2)) = 0,$$
$$(\lambda_3\lambda_1 + a\lambda_3 - c\lambda_1 + 3ca) -$$
$$- \frac{8ab^2c}{(a^2+b^2+c^2)(c^2+a^2-b^2)}(c\lambda_3 - a\lambda_1 - (c^2+a^2)) = 0,$$

stelt het osculatievlak der gezochte kubische ruimtekromme voor.

Uit de symmetrie volgt dadelijk, dat tusschen de parameters ook nog de betrekking:

$$(\lambda_1\lambda_2 + b\lambda_1 - a\lambda_2 + 3ab) -$$
$$- \frac{8abc^2}{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}(a\lambda_1 - b\lambda_2 - (a^2+b^2)) = 0$$

bestaat. Deze hangt natuurlijk van de beide eerste af.

Onmiddellijk kan men nu de vergelijking vinden van het eenige reëele osculatievlak, dat door een willekeurig punt van eene der gegeven rechten l_1, l_2 of l_3 gaat. Wil men b.v. het osculatievlak bepalen, dat door het punt in het oneindige van l_1 gaat, dan stelt men $\lambda_1 = \infty$ en vindt

$$\lambda_2 = -b + \frac{8a^2bc^2}{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}, \quad \lambda_3 = c - \frac{8a^2b^2c}{(a^2+b^2+c^2)(c^2+a^2-b^2)}.$$

met behulp waarvan onmiddellijk de vergelijking van 't gezochte vlak gevonden wordt.

Opmerkingen. I. Zeer eenvoudig wordt het voorgaande, wanneer het parallelopipedum in een kubus overgaat, dus $a = b = c$ is. De vergelijking van het osculatievlak wordt in dat geval:

$$X(\lambda^2 + 2a\lambda + 5a^2)(5a + 3\lambda) + Y(\lambda^2 - 2a\lambda + 5a^2)(5a - 3\lambda) -$$
$$- 4aZ(25a^2 + \lambda^2) + 2a\lambda(25a^2 - \lambda^2) = 0.$$

Met behulp hiervan kan men onmiddellijk de coördinaten van een punt der kromme als functies van den parameter λ uitdrukken. De kromme is dan een bijzonder geval van de in vraagstuk 68 bedoelde krommen.

II. In 't algemeene geval snijdt een willekeurig osculatievlak de rechten l_1, l_2 en l_3 achtereenvolgens in de punten $(\lambda_1, b, -c)$, $(-a, \lambda_2, c)$ en $(a, -b, \lambda_3)$. Brengt men nu twee vlakken door de rechte l_1 en elk der punten λ_2 en λ_3, dan vindt men voor den hoek ϕ_1 dier vlakken:

$$\operatorname{tg}\phi_1 = \pm \frac{\dfrac{\lambda_2 - b}{2c} + \dfrac{2b}{\lambda_3 + c}}{1 - \dfrac{b(\lambda_2 - b)}{c(\lambda_3 - c)}} = \pm \frac{\lambda_2\lambda_3 - b\lambda_3 + c\lambda_2 + 3bc}{c\lambda_3 - b\lambda_2 + b^2 + c^2}.$$

Doch dit is volgens de eerste der betrekkingen, die tusschen de parameters bestaan, constant, zoodat:

$$\operatorname{tg}\phi_1 = \pm \frac{8a^2bc}{(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}.$$

III. De drie gegeven ribben zijn de zoogenaamde focaallijnen der kubische ruimtekromme.

De volgende vroeger verschenen uitgaven zijn tegen de daarbij aangegeven prijzen te ontbieden bij den Ondervoorzitter, den Heer D. COELINGH, Amsterdam, Marnixstraat 409, bij wien men ook klachten inbrengen kan over eventueele onregelmatigheden in de toezending der uitgaven van het Genootschap.

Feestgave van het Wiskundig Genootschap ter gelegenheid van zijn honderdjarig bestaan, bevattende de herdruk van twee zeldzame, merkwaardige Hollandsche werken [(Corte onderrichtinghe dienende tot het maecken vande reductien vande tacxcustingen tot gereede penningen, om dien-volgende te eysschen en ontfangen den veertichsten penning op alle vercochte of vervreemde onroerende goeden, volgende tplacaet der Heeren Staten van den XXII Decembris 1598) en (Waerdye van Lyf-renten naer proportie van Los-renten, geteekent JOHAN DE WITT, 1671)]
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1885
in den handel *f* 3,00 . . . . voor de leden *f* 1,50.

Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundige wetenschappen (naar den franschen tekst bewerkt), Amsterdam, 1892
in den handel *f* 2,00 . . . . voor de leden *f* 1,00.

Voordrachten over den Grondslag, per vel
in den handel *f* 0,30 . . . . voor de leden *f* 0,15.

Nieuw Archief voor Wiskunde, eerste reeks, twintig deelen, tweede reeks, deel 1 en 2, per deel
in den handel *f* 4,00 . . . . voor de leden *f* 2,00.
(De volgende deelen per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00,
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,50 . . . . voor de leden *f* 0,75).

Wiskundige Opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, deel 1—7 per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,00 . . . . voor de leden *f* 0,50.

Revue semestrielle des publications mathématiques, deel 1—8, elk van twee stukken à *f* 4,00 en bij overcompleete stukken, per stuk *f* 2,00.

Tables des matières des volumes I—V . . . *f* 2,00.

Vraagstuk LXXI.

Q 4 a. In het zijvlak ABC van een viervlak ABCD neemt men een punt D_1 willekeurig aan en bepaalt de harmonische poollijn d_1 van D_1 ten opzichte van ABC. Een vlak door d_1 snijdt AD in P_1, BD in Q_1, CD in R_1. De rechten AQ_1, BR_1, CP_1 snijden het vlak (Dd_1) in drie punten C_1, A_1, B_1, zoodat $A_1B_1C_1D_1$ en ABCD in en om elkaar beschreven zijn (Tetraëders van MÖBIUS), en op negen verschillende wijzen hyperboloïdische ligging hebben.

Zijn B_2, C_2, A_2 de snijpunten van AR_1, BP_1, CQ_1 met het vlak (Dd_1), dan hebben de viervlakken $A_2B_2C_2D_1$ en ABCD dezelfde eigenschappen. (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

1. We nemen ABCD als coördinatenviervlak aan en stellen de coördinaten van het gegeven punt D_1 door α, β, γ, 0 voor. Dan wordt de lijn d_1 door de vergelijkingen

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=0, \quad t=0$$

aangewezen en kan

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}+\frac{t}{\delta}=0$$

de vergelijking van het vlak $P_1Q_1R_1$ door d_1 zijn.

De coördinaten der punten P_1, Q_1, R_1, A_1, B_1, C_1, D_1 zijn dan vervat in het volgende schema:

	P_1	Q_1	R_1	A_1	B_1	C_1	D_1
x	α	0	0	0	$-\alpha$	α	α
y	0	β	0	β	0	$-\beta$	β
z	0	0	γ	$-\gamma$	γ	0	γ
t	$-\delta$	$-\delta$	$-\delta$	δ	δ	δ	0

Hieruit blijkt onmiddellijk — wat ook meetkundig duidelijk is —, dat de hoekpunten van $A_1B_1C_1D_1$ in de zijvlakken van ABCD liggen. Verder volgt uit het verdwijnen der determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \gamma & \delta \\ \alpha & -\beta & 0 & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma & \delta \\ \alpha & -\beta & 0 & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma & \delta \\ -\alpha & 0 & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & -\gamma & \delta \\ -\alpha & 0 & \gamma & \delta \\ \alpha & -\beta & 0 & \delta \end{vmatrix},$$

dat omgekeerd de hoekpunten van ABCD in de zijvlakken van $A_1B_1C_1D_1$ liggen. Dus zijn ABCD en $A_1B_1C_1D_1$ twee viervlakken van Möbius.

Blijft te bewijzen, dat in elk der zijvlakken van het eene viervlak het hoekpunt van het andere, met betrekking tot den in dit zijvlak gelegen driehoek, tot harmonische poollijn heeft de snijlijn van dit zijvlak met het overeenkomstige zijvlak van het andere; want alleen in dit geval (zie de oplossing van vraagstuk 67) zijn er *negen* viertallen van lijnen met hyperboloïdische ligging. Voor D_1 en de snijlijn d_1 van ABC met $A_1B_1C_1$ is deze betrekking gegeven, voor de punten A_1, B_1, C_1 en de overeenkomstige snijlijnen wordt ze gemakkelijk aangetoond. We hebben het schema der coördinaten van $A_1B_1C_1D_1$

	A_1	B_1	C_1	D_1
x	0	$-\alpha$	α	α
y	β	0	$-\beta$	β
z	$-\gamma$	γ	0	γ
t	δ	δ	δ	0

slechts in den vorm

	B_1	C_1	D_1	A_1
y	0	$-\beta$	β	β
z	γ'	0	$-\gamma'$	γ'
t	$-\delta$	δ	0	δ
x	α	α	α	0

te schrijven (waarbij γ' voor $-\gamma$ is ingevoerd), om in te zien, dat A_1 en de snijlijn a_1 van BCD en $B_1C_1D_1$ met betrekking tot BCD even zoo gelegen zijn als D_1 en de snijlijn d_1 van ABC en $A_1B_1C_1$ met betrekking tot ABC, enz.

Bij vervanging van de lijnen BR_1A_1, CP_1B_1, AQ_1C_1 door CQ_1A_2, AR_1B_2, BP_1C_2 komt voor het schema

	A_1	B_1	C_1	D_1
x	0	$-\alpha$	α	α
y	β	0	$-\beta$	β
z	$-\gamma$	γ	0	γ
t	δ	δ	δ	0

in de plaats

	A_2	B_2	C_2	D_1
x	0	α	$-\alpha$	α
y	$-\beta$	0	β	β
z	γ	$-\gamma$	0	γ
t	δ	δ	δ	0

en het bewijs blijft geheel hetzelfde.

Oplossing *van* Dr. P. Zeeman Gz.

1. Daar de te bewijzen eigenschap projectief is, kan men volstaan met haar te bewijzen voor de figuur, die uit de gegevene door eene projectieve transformatie ontstaat. Kiest men deze zoodanig, dat d_1 overgaat in de lijn in het oneindige van het vlak ABC, dan zal D_1 overgaan in het zwaartepunt van driehoek ABC. Het vlak $P_1Q_1R_1$ zal dan, evenals het vlak (Dd_1), evenwijdig zijn aan ABC. Omdat P_1Q_1, Q_1R_1 en R_1P_1 achtereenvolgens evenwijdig zijn aan AB, BC en CA, zullen ook de rechten DA_1, DB_1 en DC_1 achtereenvolgens evenwijdig zijn met BC, CA en AB en, wat hunne lengte betreft, evenredig aan die zijden. Doch daaruit leidt men onmiddellijk af, dat de zijden A_1B_1, B_1C_1 en C_1A_1 van driehoek $A_1B_1C_1$ evenwijdig zijn aan de medianen CD_1, AD_1 en BD_1 van driehoek ABC, terwijl eindelijk DA_1, DB_1 en DC_1 de medianen van driehoek $A_1B_1C_1$ zullen zijn.

Uit die figuur blijkt nu, dat ABCD en $A_1B_1C_1D_1$ twee vierlakken van Möbius zijn. (A_1 ligt in BCD, omdat A_1D en BC evenwijdig zijn, enz.). De drie viertallen van rechten in N°. 67 onder type III aangewezen, hebben dus zeker hyperboloïdische ligging. Doch ook het viertal

$$AA_1, \quad BB_1, \quad CD_1, \quad DC_1$$

is hyperboloïdisch. Het wordt door AB gesneden in

A , B, midden van AB, punt in het oneindige op AB,

en door A_1B_1 in

A_1 , B_1, punt in het oneindige van A_1B_1, midden van A_1B_1.

Daar nu de dubbelverhoudingen dezer beide viertallen van

punten gelijk zijn (beide zijn harmonische viertallen) is het genoemde quadrupel hyperboloïdisch.

Verder verkeert het viertal

$$AA_1 \ , \ BD_1 \ , \ CC_1 \ , \ DB_1$$

in hetzelfde geval. Deze vier rechten toch worden zoowel door AC als door A_1C_1 in vier harmonische punten gesneden. Daaruit volgt dan (zie vraagstuk 67), dat de beide viervlakken op negen verschillende wijzen hyperboloïdisch liggen.

Op geheel dezelfde wijze kan men aantoonen, dat dit ook met de beide viervlakken $A_2B_2C_2D_1$ en ABCD het geval is.

2. Neemt men voor ABCD een regelmatig viervlak, D_1 in het zwaartepunt van driehoek ABC, verder de punten $A_1B_1C_1$ zoodanig in het vlak door D evenwijdig aan ABC, dat zij een driehoek vormen die D tot middelpunt heeft en congruent is met ABC, doch waarvan de zijden hoeken van 120° met die van ABC vormen, dan verkrijgt men een eigenaardig bijzonder geval van het voorgaande.

Vraagstuk LXXII.

K 8 a. Op de zijden van een vierhoek $A_1A_2A_3A_4$ heeft men buitenwaarts de vierkanten $A_1B_1C_1A_2$, $A_2B_2C_2A_3$, $A_3B_3C_3A_4$, $A_4B_4C_4A_1$ beschreven. Te bewijzen dat het oppervlak van den vierhoek $C_1B_2C_3B_4$ gelijk is aan het vierkant op de diagonaal A_2A_4 beschreven plus het dubbel van den vierhoek $A_1A_2A_3A_4$.

(Dr. H. van Aubel.)

Opgelost *door* T. J. Allersma, Dr. H. van Aubel, P. Bakker, J. A. Barrau, Mej. C. H. de Haas, E. D. J. de Jongh Jr., Mevr. A. G. Kerkhoven—Wijthoff, J. A. Kerkhoven *en* Dr. A. J. A. Prange.

Oplossing *van* J. A. Kerkhoven.

Construeer op A_2A_4 de vierkanten A_2A_4EF en A_2A_4GH (fig. 8) en trek de lijnen EC_3, FB_2, GB_4 en HC_1. Dan is

$$A_2FB_2 \cong A_2A_4A_3 \cong EA_4C_3\,;$$

$$A_2HC_1 \cong A_2A_4A_1 \cong GA_4B_4.$$

Derhalve verdeelen B_2C_3 en C_1B_4 de zeshoeken $A_2A_4C_3EFB_2$

en $A_2A_4B_4GHC_1$ in twee gelijk en gelijkvormige vierhoeken, zoodat

$$A_2A_4C_3B_2 = \tfrac{1}{2}(A_2A_4EF + 2A_2A_4A_3),$$

$$A_2A_4B_4C_1 = \tfrac{1}{2}(A_2A_4GH + 2A_2A_4A_1).$$

Verder is

$$A_2B_2C_1 = A_1A_2A_3,$$

en

$$A_4C_3B_4 = A_1A_4A_3.$$

Uit deze vier vergelijkingen volgt door optelling

$$B_2C_3B_4C_1 = A_2A_4EF + 2A_1A_2A_3A_4.$$

Vraagstuk LXXIII.

K 1 c. Is $A_1B_1C_1$ de eerste driehoek van BROCARD, en zijn D en E de punten, die de zijde BC van driehoek ABC in drie gelijke deelen verdeelen, zoodat BD = DE = EC is, dan vraagt men te bewijzen, dat, als A′ een willekeurig punt van A_1D (of A_1E) is en de driehoeken CB′A, AC′B rechtstreeks gelijkvormig met BA′C zijn, de door A, B, C evenwijdig aan C′A′, A′B′, B′C′ (of aan A′B′, B′C′, C′A′) getrokken lijnen door één punt gaan.

(DR. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* DR. H. VAN AUBEL *en* DR. A. J. A. PRANGE.

Oplossing *van* DR. A. J. A. PRANGE.

Zijn α, β, γ, λ, μ achtereenvolgens de cotangenten van de hoeken A, B, C, A′CB, A′BC, dan vinden wij voor de punten A′, B′, C′ het volgend stelsel barycentrische coördinaten

$$\left.\begin{array}{l} A' : -(\beta+\gamma),\ \lambda+\gamma,\ \mu+\beta; \\ B' : \mu+\gamma,\ -(\gamma+\alpha),\ \lambda+\alpha; \\ C' : \lambda+\beta,\ (\mu+\alpha),\ -(\alpha+\beta). \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots 1).$$

De vergelijkingen der lijnen A′B′, B′C′, C′A′ zijn dan

$$\left.\begin{array}{l} \{\lambda^2+(\lambda+\mu)(\gamma+\alpha)+1\}+y\{\mu^2+(\lambda+\mu)(\beta+\gamma)+1\}-z\{\lambda\mu+(\lambda+\mu)\gamma-1\}=0, \\ \{\lambda\mu+(\lambda+\mu)\alpha-1\}+y\{\lambda^2+(\lambda+\mu)(\alpha+\beta)+1\}+z\{\mu^2+(\lambda+\mu)(\gamma+\alpha)+1\}=0, \\ \{\mu^2+(\lambda+\mu)(\alpha+\beta)+1\}-y\{\lambda\mu+(\lambda+\mu)\beta-1\}+z\{\lambda^2+(\lambda+\mu)(\beta+\gamma)+1\}=0. \end{array}\right\} \ldots 2).$$

De lijnen door A, B, C evenwijdig aan C'A', A'B', B'C' getrokken, hebben tot vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} y(\mu+\alpha+2\beta)-z(\lambda-\mu+\gamma-\alpha)&=0,\\ z(\mu+\beta+2\gamma)-x(\lambda-\mu+\alpha-\beta)&=0,\\ x(\mu+\gamma+2\alpha)-y(\lambda-\mu+\beta-\gamma)&=0.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots 3).$$

Deze drie lijnen zullen door één punt gaan, als $2\mu-\lambda+\alpha+\beta+\gamma=0$ is.

De lijn A_1D, waarvan A_1 tot coördinaten heeft $\beta+\gamma$, $\alpha+\beta$, $\gamma+\alpha$ en D 0, 2, 1, wordt voorgesteld door de vergelijking

$$x(\alpha-\beta+2\gamma)+(y-2z)(\beta+\gamma)=0\ldots\ldots 4).$$

Het punt A' zal hierop zijn gelegen, indien voldaan is aan de voorwaarde

$$2\mu-\lambda+\alpha+\beta+\gamma=0\ldots\ldots\ldots\ldots 5).$$

Maar deze voorwaarde is ook vervuld, wanneer de lijnen van stelsel 3) door één punt gaan.

Vraagstuk LXXIV.

K 1 c. Zijn D, E, F punten, die de zijden van driehoek ABC in dezelfde reden verdeelen en N_a, N_b, N_c de middelpunten der cirkels van NEUBERG, dan gaan de loodlijnen uit D, E, F op AN_a, BN_b, CN_c, of op BN_b, CN_c, AN_a, of op CN_c, AN_a, BN_b getrokken, door een zelfde punt. (DR. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* DR. H. VAN AUBEL *en* DR. A. J. A. PRANGE.

Oplossing *van* DR. H. VAN AUBEL.

Stelt men

$$\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{CA}=\frac{AF}{AB}=n,$$

dan zijn de barycentrische coördinaten der punten D, E, F

$$(0,\ 1-n,\ n)\ ,\ (n,\ 0,\ 1-n)\ ,\ (1-n,\ n,\ 0).$$

Verder weet men, dat AN_a, BN_b, CN_c loodrecht zijn op de rechten, die de hoekpunten van ABC met het punt van STEINER

$R\left(\frac{1}{b^2-c^2}, \frac{1}{c^2-a^2}, \frac{1}{a^2-b^2}\right)$ verbinden. De loodlijnen uit D, E, F op AN_a, BN_b, CN_c neergelaten, zijn dus evenwijdig aan AR, BR, CR en worden bijgevolg voorgesteld door de vergelijkingen

$$(c^2-a^2)\beta - (a^2-b^2)\gamma - [c^2-a^2+n(b^2-c^2)](\alpha+\beta+\gamma)=0,$$

$$(a^2-b^2)\gamma - (b^2-c^2)\alpha - [a^2-b^2+n(c^2-a^2)](\alpha+\beta+\gamma)=0,$$

$$(b^2-c^2)\alpha - (c^2-a^2)\beta - [b^2-c^2+n(a^2-b^2)](\alpha+\beta+\gamma)=0;$$

of eenvoudiger door

$$(b^2-c^2)\gamma - (c^2-a^2)\alpha - n(b^2-c^2)(\alpha+\beta+\gamma)=0, \ldots 1)$$

$$(c^2-a^2)\alpha - (a^2-b^2)\beta - n(c^2-a^2)(\alpha+\beta+\gamma)=0, \ldots 2)$$

$$(a^2-b^2)\beta - (b^2-c^2)\gamma - n(a^2-b^2)(\alpha+\beta+\gamma)=0, \ldots 3)$$

waarvan de som identiek nul is. Dus gaan die loodlijnen door één punt.

Door eliminatie van n tusschen twee der vergelijkingen 1), 2), 3) vindt men voor de meetkundige plaats van dit punt

$$\frac{\alpha}{b^2-c^2}+\frac{\beta}{c^2-a^2}+\frac{\gamma}{a^2-b^2}=0,$$

d. i., als R_1 isotoom verwant is met R, de trilineaire poollijn van R_1.

Opmerking. Men kan evenzoo bewijzen, dat de loodlijnen uit D, E, F op BN_b, CN_c, AN_a of op CN_c, AN_a, BN_b neergelaten door één punt gaan, waarvan de meetkundige plaats de trilineaire poollijn van het punt $(a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-a^2)$ of van het punt $(c^2-a^2, a^2-b^2, b^2-c^2)$ is.

Vraagstuk LXXV.

M¹ 5 g. Welke betrekking moet er tusschen de coëfficienten van de vergelijking eener vlakke kubische kromme bestaan, opdat de poolkegelsnede van elk punt een gelijkzijdige hyperbool of een parabool zij? (J. Cardinaal.)

Opgelost *door* J. Cardinaal, Dr. A. J. A. Prange, Dr. P. H. Schoute *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

Wordt, in bekende symbolische schrijfwijze, de bedoelde kromme voorgesteld door

$$(a_1x + a_2y + a_3)^{(3)} = 0,$$

dan heeft de poolkegelsnede van het punt (x', y') tot vergelijking

$$(a_1x' + a_2y' + a_3)(a_1x + a_2y + a_3)^{(2)} = 0.$$

I. Deze kegelsnede is een gelijkzijdige hyperbool, als voldaan wordt aan

$$(a_1^2 + a_2^2)(a_1x' + a_2y' + a_3) = 0,$$

en deze voorwaarde is onafhankelijk van x' en y' vervuld, wanneer men heeft

$$a_1^3 + a_1a_2^2 = 0\ ,\quad a_1^2a_2 + a_2^3 = 0\ ,\quad a_1^2a_3 + a_2^2a_3 = 0\ ,$$

of, in niet-symbolische schrijfwijze,

$$a_{111} + a_{122} = 0\ ,\quad a_{112} + a_{222} = 0\ ,\quad a_{113} + a_{223} = 0.$$

De kromme kan dan voorgesteld worden door de vergelijking

$$a_0x(x^2-3y^2) + a_1y(3x^2-y^2) + 3b_0(x^2-y^2) + 6b_1xy + 3(c_0x+c_2y) + d = 0.$$

II. De poolkegelsnede is een parabool, wanneer men heeft

$$a_1^2(a_1x' + a_2y' + a_3)\,b_2^2(b_1x' + b_2y' + b_3) =$$
$$= a_1a_2(a_1x' + a_2y' + a_3)\,b_1b_2(b_1x' + b_2y' + b_3).$$

Hier zijn de symbolen b herhalingen van de coëfficienten a. Deze betrekking wordt onafhankelijk van x' en y' onder de voorwaarden

$$a_{111}a_{122} = a^2_{112},\ a_{112}a_{222} = a^2_{122},\ a_{113}a_{223} = a^2_{123},\ a_{111}a_{222} = a_{112}a_{122},$$
$$a_{113}a_{122} + a_{223}a_{111} = 2a_{112}a_{123},\ a_{112}a_{223} + a_{113}a_{222} = 2a_{122}a_{123}.$$

Deze zes voorwaarden kunnen vervangen worden door

$$\frac{a_{111}}{a_{112}} = \frac{a_{112}}{a_{122}} = \frac{a_{122}}{a_{222}} = \frac{a_{113}}{a_{123}} = \frac{a_{123}}{a_{223}}.$$

De kubische kromme kan dan voorgesteld worden door

$$(x + ky)^3 + p(x + ky)^2 + qx + ry + s = 0.$$

Door wenteling der coördinaatassen kan men dus komen tot de eenvoudige vergelijking

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Blijkbaar heeft deze kromme drie samenvallende punten met de oneindig ver gelegen rechte gemeen.

OPMERKING. In het eerste geval worden de asymptotische richtingen bepaald door $a_1m^3 + 3a_0m^2 - 3a_1m - a_0 = 0$. De richtingscoëfficienten zijn dus verbonden door de betrekkingen

$$m_1 + m_2 + m_3 = -3m_1m_2m_3,$$

$$m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3 = -3,$$

waaruit door eliminatie van m_3 gevonden wordt

$$(m_1 + m_2)^2 = (m_1m_2 + 3)(3m_1m_2 + 1).$$

Dus is

$$(m_1 - m_2)^2 = 3(m_1m_2 + 1)^2$$

en

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \pm\sqrt{3}.$$

De asymptoten maken derhalve hoeken van 60° met elkaar.

Vraagstuk LXXVI.

M[1] 5 d. Waar ligt het middelpunt van den stralenbundel, die met den kegelsnedenbundel

$$x^2 + 2xy + \lambda y^2 + 2y = 0$$

de kubische kromme

$$x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + 4y^3 + x^2 + 4xy + 5y^2 + 2y = 0$$

voortbrengt. (J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. CARDINAAL, DR. P. H. SCHOUTE *en* DR. C. STOLP.

Oplossing.

Daar de vergelijking der gegeven kromme kan geschreven werden in den vorm

$$(x^2 + 2xy + 2y)(x + y + 1) + y^2(4x + 4y + 3) = 0,$$

kan ze verkregen worden door eliminatie van λ uit de vergelijkingen

$$x^2 + 2xy + 2y + \lambda y^2 = 0,$$
$$4x + 4y + 3 - \lambda(x + y + 1) = 0.$$

De eerste stelt een bundel kegelsneden voor, waarvan de vier basispunten in den oorsprong vereenigd zijn; de tweede wijst een stralenbundel aan, waarvan het middelpunt oneindig ver op de lijn $x + y = 0$ ligt.

Vraagstuk LXXVII.

L² 2 f. Van een bundel kwadratische kegelvlakken zijn de vier door een punt T gaande gemeenschappelijke beschrijvende rechten gegeven. Men vraagt den tot dezen bundel behoorenden gelijkzijdigen kegel, te construeeren. (Zie voor de omschrijving van een gelijkzijdigen kegel: SCHRÖTER, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, bl. 76). (J. CARDINAAL.)

Oplossing *van* J. CARDINAAL.

Volgens bepaling bezit een gelijkzijdige kegel drie loodrecht op elkander staande kegelstralen. We zullen verder als bewezen aannemen, daartoe verwijzende naar het aangehaalde werk, dat wanneer dit bij *een* drietal stralen het geval is, er oneindig vele dergelijke drietallen aanwezig zijn.

Zij nu a een der gegeven gemeenschappelijke beschrijvende rechten van den bundel. We brengen door den top T een vlak $\Phi \perp a$. De gevraagde kegel moet het vlak Φ volgens twee loodrecht op elkaar staande rechten l en l' snijden. Elke kegel die tot den bundel behoort, snijdt Φ volgens twee stralen; deze stralenparen vormen met elkander eene involutie; wenscht men dus de stralen l en l' te construeeren, dan behoeft men slechts de assen dezer involutie op te sporen.

Vraagstuk LXXVIII.

K 17 e. In een bolvierhoek ABCD zijn de overstaande hoeken A en C recht. Men bepaalt de projecties E en F der hoekpunten B en D op de diagonaal AC, en trekt door het snijpunt O der

diagonalen een boog van een grooten cirkel loodrecht op BD, die twee overstaande zijden in P en Q snijdt. Te bewijzen AE = CF en OP = OQ. (J. VAN DE GRIEND JR.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. VAN DE GRIEND JR., E. D. J. DE JONGH JR., DR. C. STOLP *en* DR. J. DE VRIES.

Oplossing *van* E. D. J. DE JONGH JR.

We stellen AB, BC, CD, DA, AC, BD achtereenvolgens door a, b, c, d, e, f voor.

In △ ABC hebben we

$$\cos b = \cos a \cos e + \sin a \sin e \cos \mathrm{BAC}.$$

Maar in den rechthoekigen boldriehoek BEA is

$$\cos \mathrm{BAC} = \cot a \operatorname{tg} \mathrm{AE}.$$

Substitueeren we deze waarde van cos BAC in bovenstaande formule, dan vinden we

$$\cos b = \cos a (\cos e + \sin e \operatorname{tg} \mathrm{AE}).$$

Hieruit volgt

$$\operatorname{tg} \mathrm{AE} = \left(\frac{\cos b}{\cos a} - \cos e\right) : \sin e.$$

Op dezelfde wijze vinden we

$$\operatorname{tg} \mathrm{CF} = \left(\frac{\cos d}{\cos c} - \cos e\right) : \sin e.$$

Nu is $\cos f = \cos a \cos d = \cos b \cos c$, dus $\dfrac{\cos b}{\cos a} = \dfrac{\cos d}{\cos c}$.

Derhalve is tg AE = tg CF en AE = CF.

Trekken we de bogen PG en QH beide loodrecht op AC, dan hebben we op grond van het bovenstaande OF = CH en dus ook OH = CF = AE = OG.

In den rechthoekigen △ POG is tg OP = tg OG : cos POG en in den rechthoekigen △ QOH tg OQ = tg OH : cos QOH.

Dus is OP = OQ.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Een bolvierhoek ABCD wordt gevormd door twee boldriehoeken, die op dezelfde basis AC staan, terwijl de toppen òf aan weerskanten òf aan denzelfden kant van AC liggen. Deze

driehoeken zullen wij beschouwen als bepaald door de basis $AC = b$ en de hoeken aan de basis, die wij in driehoek ABC door α en γ, in driehoek ADC door α' en γ' zullen aanduiden. De projecties van AB en CD op de basis noemen wij p en q; de eerste beschouwen wij als positief in de richting AC, de tweede in de richting CA.

I. In de rechthoekige driehoeken ABE en CBE zijn de producten $\sin p \operatorname{tg} \alpha$ en $\sin (b - p) \operatorname{tg} \gamma$ beide gelijk aan tg BE. Evenzoo is tg DF in de rechthoekige driehoeken ADF en CDF gelijk aan elk der producten $\sin (b - q) \operatorname{tg} \alpha'$ en $\sin q \operatorname{tg} \gamma'$. Hieruit volgt de juistheid der vergelijking

$$\sin p \sin (b - q) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = \sin (b - p) \sin q \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \gamma' \quad . \; . \; 1)$$

Zal nu $p = q$ zijn, dan moet men noodzakelijk hebben

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \gamma' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

In ons vraagstuk is $A = C = 90°$ ondersteld. Liggen B en D aan weerskanten van AC, dan is $A = \alpha + \alpha'$, $B = \gamma + \gamma'$. Zijn B en D aan denzelfden kant van AC gelegen, dan is $A = \alpha - \alpha'$, $B = \gamma' - \gamma$. In het eerste geval hebben de leden van 2) de waarde $+1$, in het tweede geval de waarde -1, zoodat aan de voorwaarde 2) voldaan is.

Evenwel is deze voorwaarde niet voldoende. Deelt men toch 2) op 1) dan krijgt men

$$\sin p \sin (b - q) = \sin (b - p) \sin q,$$

waarvan de volledige oplossing is $p - q = 0$ of $= \pm 180°$. De laatste gevallen kunnen alleen plaats hebben, als p en q in teeken verschillen; hun volstrekte waarden zijn dan elkaars supplementen. Uit het voorgaande blijkt dus, dat onder de voorwaarde 2), terwijl AE en CF tegengesteld gericht zijn,

$$AE = CF \;, \quad AF = CE$$

is, terwijl men bij gelijke richting van AE en CF heeft

$$AE + CF = AF + CE = 180°.$$

Zoo geldt b.v. de laatste betrekking, als $A = 90°$ en $C = 270°$ is.

II. Door het snijpunt O der diagonalen AC en BD brengen wij een grooten cirkel. Wij nemen aan, dat deze de zijde BC in P, de zijde AD in Q snijdt en dat G en H de projecties

van P en Q op AC zijn. Den hoek AOB der diagonalen stellen wij door ϕ, den hoek POC door ψ voor. Over ψ beschikken wij zóó, dat voldaan is aan

$$\operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Elk der vierhoeken ABOQ en OPCD heeft nu dezelfde eigenschap als vierhoek ABCD, zoodat

$$AE = OH \text{ en } OG = FC.$$

Volgens I waren echter AE en FC even lang; dus is ook OG = OH en zijn de rechthoekige driehoeken OGP en OHQ gelijk en gelijkvormig. Daaruit volgt onmiddellijk

$$OP = OQ.$$

Let men nu op het bijzonder geval van ons vraagstuk, waarbij $\operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\phi$ een der waarden ± 1 heeft, zoo blijkt, dat dan de groote cirkel loodrecht op de diagonaal BD getrokken moet worden.

Dezelfde groote cirkel snijdt het verlengde van BC in een punt P′ en het verlengde van AD in een punt Q′. Daar nu P′ en Q′ de tegenpunten van P en Q zijn en gelijke bogen gelijke supplementen hebben, is ook

$$OP' = OQ'.$$

OPMERKING. Daar een groote cirkel door het snijpunt der diagonalen van een bolvierhoek hoogstens één paar overstaande zijden snijdt en wij aangenomen hebben, dat dit het geval was met de zijden BC en AD, zal deze de verlengden van de zijden BA en CD elk in twee punten snijden, b.v. het verlengde van BA in R en R′ en dat van CD in S en S′. Die vier punten laten zich twee aan twee zóó samenvoegen, dat men heeft OR = OS, OR′ = OS′. Het bewijs wordt hier wegelaten, omdat het grootendeels met het voorgaande overeenkomt. Hetzelfde geldt voor vierhoeken, waarvan twee overstaande zijden elkaar snijden.

Vraagstuk LXXIX.

E 5. Bewijs dat $\displaystyle\int_a^\beta \frac{z^2 - \alpha\beta}{(z+\alpha)(z+\beta)} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(\beta^2-z^2)}} = 0$ is.

(DR. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* DR. W. KAPTEYN, MEVR. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF, DR. C. STOLP *en* DR. A. VAN THIJN.

Oplossing *van* Dr. C. Stolp *en* Dr. A. van Thijn.

De vorm onder het integraalteeken laat zich herleiden tot

$$\frac{\frac{z}{\alpha}-\frac{\beta}{z}}{\left(\frac{z}{\alpha}+1\right)\left(1+\frac{\beta}{z}\right)}\cdot\frac{\frac{dz}{\alpha z}}{\sqrt{\left(\frac{z^2}{\alpha^2}-1\right)\left(\frac{\beta^2}{z^2}-1\right)}}.$$

Stelt men nu $\frac{z}{\alpha}=\frac{\beta}{u}$, dan is $\frac{\beta}{z}=\frac{u}{\alpha}$ en $uz=\alpha\beta$.

Dus is $udz+zdu=0$ of $\frac{dz}{z}=-\frac{du}{u}$, zoodat de integraal gelijk is aan

$$I=\int_{\beta}^{\alpha}\frac{\frac{\beta}{u}-\frac{u}{\alpha}}{\left(\frac{\beta}{u}+1\right)\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)}\cdot\frac{-\frac{du}{\alpha u}}{\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{u^2}-1\right)\left(\frac{u^2}{\alpha^2}-1\right)}}=$$

$$-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{u^2-\alpha\beta}{(u+\alpha)(u+\beta)}\cdot\frac{du}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(\beta^2-u^2)}}=-I.$$

Hieruit blijkt dat de integraal gelijk is aan nul.

Oplossing *van* Mevr. A. G. Kerkhoven—Wythoff.

De gegeven integraal is de som van

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\,\frac{dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(\beta^2-z^2)}}$$

$$\text{en } I'=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{z-\beta}{z+\beta}\,\frac{dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(\beta^2-z^2)}}.$$

Verwisseling van α en β geeft

$$I=\int_{\beta}^{\alpha}\frac{z-\beta}{z+\beta}\,\frac{dz}{\sqrt{(z^2-\beta^2)(\alpha^2-z^2)}}.$$

Men heeft dus $I=-I'$, d. w. z. $I+I'=0$.

Opmerking van Dr. C. Stolp. Voor $\alpha=0$ vindt men $I=1:\beta$.

Vraagstuk LXXX.

H 11 c. Wordt gevraagd langs symbolischen weg uit de vergelijking

$$\frac{1}{c_1\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y-x)\,e^{-\frac{x^2}{c_1^2}}dx = \frac{1}{c\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{c^2}}$$

de functie f te bepalen. (DR. W. KAPTEYN.)

Oplossing *van* DR. W. KAPTEYN.

Stelt men in

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2-2lv}\,dv = \sqrt{\pi}\,e^{l^2}$$

$l = \frac{c_1}{2}\frac{d}{dy}$ en past beide bewerkingen toe op $f(y)$, zoo vindt men

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2-c_1 v\frac{d}{dy}} f(y)\,dv = \sqrt{\pi}\,e^{\frac{c_1^2}{4}\frac{d^2}{dy^2}} f(y).$$

Nu is

$$e^{-c_1 v\frac{d}{dy}} f(y) = f(y-c_1 v),$$

dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} f(y-c_1 v)\,dv = \sqrt{\pi}\,e^{\frac{c_1^2}{4}\frac{d^2}{dy^2}} f(y)$$

of, als $v = \frac{x}{c_1}$ gesteld wordt,

$$\frac{1}{c_1\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{c_1^2}} f(y-x)\,dx = e^{\frac{c_1^2}{4}\frac{d^2}{dy^2}} f(y).$$

Uit de gegeven vergelijking volgt dus

$$f(y) = \frac{1}{c\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{c_1^2}{4}\frac{d^2}{dy^2}}\,e^{-\frac{y^2}{c^2}}.$$

Stelt men nu in

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2iul}\,du = \sqrt{\pi}\,e^{-l^2}$$

$l = \frac{c_1}{2}\frac{d}{dy}$ en past beide bewerkingen toe op $e^{-\frac{y^2}{c^2}}$, zoo komt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+ic_1u\frac{d}{dy}}\left(e^{-\frac{y^2}{c^2}}\right)du = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{c_1^2}{4}\frac{d^2}{dy^2}}\left(e^{-\frac{y^2}{c^2}}\right).$$

Het eerste lid dezer vergelijking kan nu als volgt herleid worden

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+ic_1u\frac{d}{dy}}\left(e^{-\frac{y^2}{c^2}}\right)du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, e^{-\frac{(y+ic_1u)^2}{c^2}}\, du =$$

$$= e^{-\frac{y^2}{c^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{c^2-c_1^2}{c^2}u^2}\left[\cos\frac{2c_1uy}{c^2} + i\sin\frac{2c_1uy}{c^2}\right]du$$

$$= e^{-\frac{y^2}{c^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{c^2-c_1^2}{c^2}u^2}\cos\frac{2c_1uy}{c^2}\, du.$$

Nu is

$$\int_0^{\infty} e^{-pu^2}\cos qu\, du = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}\, e^{-\frac{q^2}{4p}},$$

dus

$$2e^{-\frac{y^2}{c^2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2-c_1^2}{c^2}u^2}\cos\frac{2c_1uy}{c^2}\, du = \frac{c\sqrt{\pi}}{\sqrt{c^2-c_1^2}}\, e^{-\frac{y^2}{c^2-c_1^2}}$$

en derhalve

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{c^2-c_1^2}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{c^2-c_1^2}}.$$

Een andere afleiding dezer formule kan men vinden in het proefschrift van den Heer J. H. Peek, Toepassing der Waarschijnlijkheidsrekening op Levensverzekering en Sterftestatistiek, 1898, p. 17.

Vraagstuk LXXXI.

L[1] 16 a. Gegeven zijn de rechte r en het punt F. Een rechte l snijdt r in P onder een hoek ψ, terwijl l met PF een hoek φ maakt. Bepaal de omhullende van l, als $\sin\varphi : \sin\psi$ standvastig is.

(Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* Dr. W. Kapteyn, J. F. van Oss, Dr. A. J. A. Prange, Dr. C. Stolp *en* Dr. A. van Thijn.

Oplossing *van* Dr. A. van Thijn.

Uit het snijpunt Q van twee standen l_1 en l_2 der bewegelijke rechte trekken we de loodlijn n op r en de loodlijnen p_1 en p_2 op FP_1 en FP_2.

Nu is

$$\sin\phi_1 : \sin\psi_1 = \sin\phi_2 : \sin\psi_2 = k,$$

of

$$p_1 : n = p_2 : n = k.$$

Derhalve ligt Q op de rechte, welke den nevenhoek van P_1FP_2 middendoor deelt.

Laat men l_2 tot l_1 naderen, dan nadert FQ tot de loodlijn in F op FP_1 opgericht.

Aan de grens heeft men dus

$$FQ = k\,n.$$

Derhalve is de omhullende van l een kegelsnede, waarvan F een brandpunt en r de bijbehoorende richtlijn is.

Vraagstuk LXXXII.

D 1 b. Te bewijzen

$$\int_0^b \sin^{m-1} p\,dp =$$

$$= 2^m \left\{ \frac{\operatorname{tg}^m \frac{1}{2} b}{m} - \frac{m}{1}\,\frac{\operatorname{tg}^{m+2} \frac{1}{2} b}{m+2} + \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}\,\frac{\operatorname{tg}^{m+4} \frac{1}{2} b}{m+4} - \ldots \right\}.$$

(Dr. W. Kapteyn).

Opgelost *door* Dr. W. Kapteyn, Mevr. A. G. Kerkhoven—Wythoff, J. F. van Oss *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* Dr. C. Stolp.

Stelt men

$$p = 2\,\mathrm{bg}\,\mathrm{tg}\,x,$$

dan wordt

$$\sin p = 2x(1+x^2)^{-1} \text{ en } dp = 2\,(1+x^2)^{-1}\,dx,$$

dus

$$\sin^{m-1} p\,dp = 2^m x^{m-1}(1+x^2)^{-m}\,dx.$$

Wordt hier de binomiaalformule toegepast, dan levert integratie tusschen de grenzen $x = 0$ en $x = \operatorname{tg} \frac{1}{2} b$ de gevraagde uitkomst.

Vraagstuk LXXXIII.

M¹ 1 c. De vergelijking in rechthoekige coördinaten te vinden van de kromme van HESSE, die bij de stelkundige kromme $\varphi(x, y) = 0$ behoort. (DR. W. KAPTEYN.)

Oplossing *van* DR. W. KAPTEYN.

Is de vergelijking in homogeene coördinaten $\phi(x, y, z) = 0$ dan wordt met de gewone notaties de kromme van HESSE voorgesteld door

$$H = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Wij verdrijven hieruit ϕ_{13}, ϕ_{23} en ϕ_{33} met behulp van de bekende stelling van EULER

$$x\phi_1 + y\phi_2 + z\phi_3 = n\phi.$$

Wij vinden

$$\phi_{13} = \frac{(n-1)\phi_1 - x\phi_{11} - y\phi_{12}}{z}, \quad \phi_{23} = \frac{(n-1)\phi_2 - x\phi_{12} - y\phi_{22}}{z},$$

$$\phi_{33} = \frac{n(n-1)\phi - 2(n-1)(x\phi_1 + y\phi_2) + x^2\phi_{11} + 2xy\phi_{12} + y^2\phi_{22}}{z^2}.$$

Stellen wij deze waarden in den determinant, dan kunnen we hem vereenvoudigen door de 1e kolom met $\frac{x}{z}$, de 2e met $\frac{y}{z}$ te vermenigvuldigen en deze bij de laatste kolom op te tellen; dan komt

$$H = \begin{vmatrix} \phi_{11}, & \phi_{12}, & \frac{(n-1)\phi_1}{z} \\ \phi_{12}, & \phi_{22}, & \frac{(n-1)\phi_2}{z} \\ \frac{(n-1)\phi_1 - x\phi_{11} - y\phi_{12}}{z}, & \frac{(n-1)\phi_2 - x\phi_{12} - y\phi_{22}}{z}, & \frac{n(n-1)\phi - (n-1)(x\phi_1 + y\phi_2)}{z^2} \end{vmatrix}$$

Brengen wij nu den factor $\frac{n-1}{z^2}$ buiten en tellen daarna bij de laatste rij op x-maal de 1e rij en y-maal de 2e rij, dan komt

$$H = \frac{n-1}{z^2} \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_1 \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \phi_2 \\ (n-1)\phi_1 & (n-1)\phi_2 & n\phi \end{vmatrix},$$

of

$$H = \frac{n-1}{z^2}\left[n\phi(\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}^2) - (n-1)(\phi_1^2\phi_{22} - 2\phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_2^2\phi_{11})\right].$$

Stellen wij hierin eindelijk $z = 1$, dan vinden wij voor de kromme van Hesse de vergelijking

$$n\phi(\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12})^2 - (n-1)(\phi_1^2\phi_{22} - 2\phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_2^2\phi_{11}) = 0,$$

waarin nu alleen differentiaalquotienten naar x en y van de oorspronkelijk gegeven functie $\phi(x, y)$ voorkomen.

Men ziet uit dezen vorm terstond dat de kromme van Hesse door alle veelvoudige punten en alle buigpunten van de kromme $\phi = 0$ gaat.

Vraagstuk LXXXIV.

H 11 c. Door Poisson (Mécanique I, p. 373) wordt in

$$\int_0^a \frac{\theta(z)\,dz}{\sqrt{a-z}}$$

de functie $\theta(z)$ zoo bepaald, dat de integraal onafhankelijk is van a. Men vraagt dit op een andere wijze te verrichten.

(Dr. W. Kapteyn.)

Oplossing *van* Dr. W. Kapteyn.

Stel $z = a\mu$, dan wordt

$$I = \sqrt{a}\int_0^1 \frac{\theta(a\mu)\,d\mu}{\sqrt{1-\mu}}.$$

Dus moet

$$\sqrt{a}\,\theta(a\mu) = \phi(\mu)$$

zijn, waarin $\phi(\mu)$ eene willekeurige functie van μ voorstelt.

Stelt men nu $\mu = 1$, dan blijkt dat

$$\theta(a) = \frac{\phi(1)}{\sqrt{a}} = \frac{C}{\sqrt{a}},$$

waarin C een willekeurige constante is; bijgevolg heeft men

$$\theta(z) = \frac{C}{\sqrt{z}}.$$

Vraagstuk LXXXV.

K 6 b. Met behulp van vectormeetkunde de bewegingsvergelijkingen in tripolaire coördinaten voor een stoffelijk punt af te leiden, als de krachten een potentiaal hebben, en de levende kracht uit te drukken in de tripolaire coördinaten en hunne fluxies.

(MEVR. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF.)

Oplossing *van* MEVR. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF.

Onder tripolaire coördinaten van een punt P worden verstaan zijne afstanden u, v en w tot drie vaste punten A, B en C.

Zij ρ de vector van het punt P ten opzichte van een willekeurigen oorsprong en laten α, β en γ de vectoren voorstellen van de punten A, B en C, dan is

$$u = T(\rho - \alpha),$$
$$v = T(\rho - \beta),$$
$$w = T(\rho - \gamma).$$

Door differentiatie volgt uit de eerste vergelijking

$$\dot{u} = \frac{dT(\rho - \alpha)}{dt} = -S.\dot{\rho}U(\rho - \alpha) = -\frac{1}{u}S.(\rho - \alpha)\dot{\rho}$$

en

$$\ddot{u} = \frac{\dot{u}}{u^2}S.(\rho - \alpha)\dot{\rho} - \frac{1}{u}S.\dot{\rho}^2 - \frac{1}{u}S.(\rho - \alpha)\ddot{\rho} =$$

$$= -\frac{\dot{u}^2}{u} + \frac{2T}{mu} - \frac{1}{u}S.(\rho - \alpha)\ddot{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1).$$

Hierin is m de massa van het bewegende punt en $T = -\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$ zijn levende kracht.

De overeenkomstige waarden voor $\dot{v}$, $\dot{w}$, $\ddot{v}$ en $\ddot{w}$ worden uit het bovenstaande door letterverwisseling verkregen.

Als U de potentieële energie van P voorstelt, dan is voor dat punt de bewegingsvergelijking in vectorvorm

$$m\ddot{\rho} = -\frac{\partial U}{\partial u}\dot{U}(\rho - \alpha) - \frac{\partial U}{\partial v}\dot{U}(\rho - \beta) - \frac{\partial U}{\partial w}\dot{U}(\rho - \gamma) \,..\, 2).$$

Uit deze vectorvergelijking kunnen de drie bewegingsvergelijkingen in tripolaire coördinaten afgeleid worden.

Men heeft

$$mS.(\rho - \alpha)\ddot{\rho} = -\frac{1}{u}\frac{\partial U}{\partial u}S.(\rho - \alpha)^2 - \frac{1}{v}\frac{\partial U}{\partial v}S.(\rho - \alpha)(\rho - \beta) -$$

$$-\frac{1}{w}\frac{\partial U}{\partial w}S.(\rho - \alpha)(\rho - \gamma) = u\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{1}{2v}(u^2 + v^2 - c^2)\frac{\partial U}{\partial v} +$$

$$+\frac{1}{2w}(u^2 + w^2 - b^2)\frac{\partial U}{\partial w}.$$

Substitutie hiervan in 1) geeft één van de bewegingsvergelijkingen in tripolaire coördinaten

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{u} = -m\frac{\dot{u}^2}{u} + \frac{2T}{u} - \frac{\partial U}{\partial u} - \frac{1}{2uv}(u^2 + v^2 - c^2)\frac{\partial U}{\partial v} - \\ -\frac{1}{2uw}(u^2 + w^2 - b^2)\frac{\partial U}{\partial w} \end{aligned}\right\} ..3).$$

De andere twee bewegingsvergelijkingen worden hieruit door letterverwisseling gevonden. Zij zijn

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{v} = -m\frac{\dot{v}^2}{v} + \frac{2T}{v} - \frac{\partial U}{\partial v} - \frac{1}{2vw}(v^2 + w^2 - a^2)\frac{\partial U}{\partial w} - \\ -\frac{1}{2uv}(u^2 + v^2 - c^2)\frac{\partial U}{\partial u} \end{aligned}\right\} ..4)$$

en

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{w} = -m\frac{\dot{w}^2}{w} + \frac{2T}{w} - \frac{\partial U}{\partial w} - \frac{1}{2uw}(u^2 + w^2 - b^2)\frac{\partial U}{\partial u} - \\ -\frac{1}{2vw}(v^2 + w^2 - a^2)\frac{\partial U}{\partial v} \end{aligned}\right\} ..5);$$

Hierin kunnen wij T vervangen door C — U.

Om T te vinden als functie van de tripolaire coördinaten en hunne fluxies, gaan wij uit van

$$\dot{\rho}\,\mathrm{S}.(\rho-\alpha)(\rho-\beta)(\rho-\gamma)=\mathrm{S}.(\rho-\alpha)\dot{\rho}\,\mathrm{V}.(\rho-\beta)(\rho-\gamma)+$$
$$+\mathrm{S}.(\rho-\beta)\dot{\rho}\,\mathrm{V}.(\rho-\gamma)(\rho-\alpha)+\mathrm{S}.(\rho-\gamma)\dot{\rho}\,\mathrm{V}.(\rho-\alpha)(\rho-\beta).$$

Beide leden van deze vergelijking in het vierkant brengende, vinden wij

$$\dot{\rho}^2\{\mathrm{S}.(\rho-\alpha)(\rho-\beta)(\rho-\gamma)\}^2=-\{\mathrm{S}.(\rho-\alpha)\dot{\rho}\}^2\{\mathrm{TV}.(\rho-\beta)(\rho-\gamma)\}^2-$$
$$-\{\mathrm{S}.(\rho-\beta)\dot{\rho}\}^2\{\mathrm{TV}.(\rho-\gamma)(\rho-\alpha)\}^2-\{\mathrm{S}.(\rho-\gamma)\dot{\rho}\}^2\{\mathrm{TV}.(\rho-\alpha)(\rho-\beta)\}^2+$$
$$+2\mathrm{S}.(\rho-\beta)\dot{\rho}\,\mathrm{S}.(\rho-\gamma)\dot{\rho}\,\mathrm{S}.\{\mathrm{V}.(\rho-\alpha)(\rho-\beta)\}\{\mathrm{V}.(\rho-\beta)(\rho-\alpha)\}+$$
$$+2\mathrm{S}.(\rho-\gamma)\dot{\rho}\,\mathrm{S}.(\rho-\alpha)\dot{\rho}\,\mathrm{S}.\{\mathrm{V}.(\rho-\alpha)(\rho-\beta)\}\{\mathrm{V}.(\rho-\beta)(\rho-\gamma)\}+$$
$$+2\mathrm{S}.(\rho-\alpha)\dot{\rho}\,\mathrm{S}.(\rho-\beta)\dot{\rho}\,\mathrm{S}\{\mathrm{V}.(\rho-\beta)(\rho-\gamma)\}\{\mathrm{V}.(\rho-\gamma)(\rho-\alpha)\}\,..\,6).$$

Nu is

$$\mathrm{S}.(\rho-\alpha)\dot{\rho}=-u\dot{u},$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{TV}.(\rho-\beta)(\rho-\gamma)=\text{oppervlak}\ \triangle\ \mathrm{PBC},$$

$$\mathrm{S}.\{\mathrm{V}.(\rho-\gamma)(\rho-\alpha)\}\{\mathrm{V}.(\rho-\alpha)(\rho-\beta)\}=-\mathrm{S}.(\rho-\gamma)(\rho-\alpha)\mathrm{S}.(\rho-\alpha)(\rho-\beta)+$$
$$+(\rho-\alpha)^2\mathrm{S}.(\rho-\gamma)(\rho-\beta)=-\tfrac{1}{4}(w^2+u^2-b^2)(u^2+v^2-c^2)+\tfrac{1}{2}u^2(v^2+w^2-a^2),$$

$$\dot{\rho}^2=-\frac{2\mathrm{T}}{m},$$

$$\frac{1}{6}\,\mathrm{S}.(\rho-\alpha)(\rho-\beta)(\rho-\gamma)=\pm\,\text{Inhoud viervlak PABC}=\pm\,\mathrm{V}.$$

Dit en de vormen, die hieruit door letterverwisseling worden verkregen, in (6) substitueerende, vinden wij

$$-\frac{2\mathrm{T}}{m}\times 36\mathrm{V}^2=-\tfrac{1}{4}u^2(2v^2w^2+2a^2v^2+2a^2w^2-v^4-w^4-a^4)\dot{u}^2-$$
$$-\tfrac{1}{4}v^2(2u^2w^2+2b^2u^2+2b^2w^2-u^4-w^4-b^4)\dot{v}^2-$$
$$-\tfrac{1}{4}w^2(2u^2v^2+2c^2u^2+2c^2v^2-u^4-v^4-c^4)\dot{w}^2+$$
$$+2vw\{\tfrac{1}{2}u^2(v^2+w^2-a^2)-\tfrac{1}{4}(u^2+v^2-c^2)(u^2+w^2-b^2)\}\dot{v}\dot{w}+$$
$$+2uw\{\tfrac{1}{2}v^2(u^2+u^2-b^2)-\tfrac{1}{4}(v^2+w^2-a^2)(v^2+u^2-c^2)\}\dot{u}\dot{w}+$$
$$+2uv\{\tfrac{1}{2}w^2(u^2+v^2-c^2)-\tfrac{1}{4}(w^2+u^2-b^2)(w^2+v^2-a^2)\}\dot{u}\dot{v}.$$

Hierin is

$$-144V^2 = a^2(u^2-v^2)(u^2-w^2)+b^2(v^2-w^2)(v^2-u^2)+c^2(w^2-u^2)(w^2-v^2)+$$
$$+a^2u^2(a^2-b^2-c^2)+b^2v^2(b^2-c^2-a^2)+c^2w^2(c^2-a^2-b^2)+a^2b^2c^2.$$

Vraagstuk LXXXVI.

D 2 b β. Men vraagt te bewijzen

$$\sum_0^\infty \frac{\cos 2n\pi\alpha}{\sqrt{n+\alpha}} + \sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi\alpha}{\sqrt{n-\alpha}} =$$
$$= -\cot \pi\alpha^2 \left[\sum_0^\infty \frac{\sin 2n\pi\alpha}{\sqrt{n+\alpha}} - \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi\alpha}{\sqrt{n-\alpha}}\right],$$

waarin $0 < \alpha < 1$ is. (DR. J. C. KLUYVER.)

Oplossing *van* DR. J. C. KLUYVER.

Uitgaande van de algemeene ϑ-functie

$$\vartheta_{g_1 g_2}(v;\ \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \exp \pi i\tau\,(n+g_2)^2 + 2\pi i\,(v+g_1)\,(n+g_2)$$

beschouwen wij de integraal

$$\phi(v,\ g_2) = \int_0^\infty \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(\frac{\tau}{i}\right) \vartheta_{0,g_2}(v;\ \tau)$$

waarin wij v en g_2 beide tusschen 0 en 1 gelegen denken.

Term voor term integreerende, vinden wij

$$\phi(v, g_2) = \Gamma(\tfrac{1}{2})\,\pi^{-\frac{1}{2}} \left\{\sum_0^\infty \frac{e^{2\pi i v(n+g_2)}}{\sqrt{n+g_2}} + \sum_1^\infty \frac{e^{2\pi i v(g_2-n)}}{\sqrt{n-g_2}}\right\}.$$

Een andere uitdrukking voor de integraal wordt op de volgende wijze gevonden. Door splitsing heeft men

$$\phi(v, g_2) = \int_0^1 \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(\frac{\tau}{i}\right) \vartheta_{0,g_2}(v;\ \tau) + \int_1^\infty \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(\frac{\tau}{i}\right) \vartheta_{0,g_2}(v;\ \tau).$$

In de eerste integraal substitueert men $\tau = -\dfrac{1}{\tau_1}$ en maakt gebruik van de transformatieformule

$$\vartheta_{0,g_2}\left(v;\ -\frac{1}{\tau_1}\right) = e^{2\pi i v(g_2-1)}\sqrt{\frac{\tau_1}{i}}\,\vartheta_{0,v}(1-g_2;\ \tau_1);$$

dan wordt

$$\phi(v,\ g_2) = e^{2\pi i v(g_2-1)}\int_1^\infty \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(\frac{\tau}{i}\right)\vartheta_{0,v}(1-g_2;\ \tau) +$$

$$+\int_1^\infty \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(\frac{\tau}{i}\right)\vartheta_{0,g_2}(v;\ \tau).$$

Evenzoo heeft men

$$\phi(1-g_2,\ v) = e^{2\pi i(1-g_2)(v-1)}\int_1^\infty \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(\frac{\tau}{i}\right)\vartheta_{0,1-g_2}(1-v;\ \tau) +$$

$$+\int_1^\infty \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(\frac{\tau}{i}\right)\vartheta_{0,v}(1-g_2;\ \tau),$$

en daar

$$\vartheta_{0,1-g_2}(1-v;\ \tau) = e^{-2\pi i g_2}\,\vartheta_{0,g_2}(v;\ \tau),$$

kan men schrijven

$$\phi(1-g_2,\ v) = e^{-2\pi i v(g_2-1)}\int_1^\infty \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(\frac{\tau}{i}\right)\vartheta_{0,g_2}(v;\ \tau) +$$

$$+\int_1^\infty \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(\frac{\tau}{i}\right)\vartheta_{0,v}(1-g_2;\ \tau).$$

Hieruit volgt echter onmiddellijk

$$\phi(1-g_2,\ v) = e^{-2\pi i v(g_2-1)}\,\phi(v,\ g_2),$$

of na eenige herleiding

$$\sum_0^\infty \frac{e^{2n\pi i v}}{\sqrt{n+g_2}} + \sum_1^\infty \frac{e^{-2n\pi i v}}{\sqrt{n-g_2}} =$$

$$= e^{-2\pi i v g_2}\left\{\sum_0^\infty \frac{e^{-2n\pi i g_2}}{\sqrt{n+v}} + \sum_1^\infty \frac{e^{2n\pi i g_2}}{\sqrt{n-v}}\right\}.$$

Splitsing in het bestaanbaar en onbestaanbaar gedeelte geeft slechts één vergelijking, n.l.

$$\sum_0^\infty \frac{\cos 2n\pi v}{\sqrt{n+g_2}} + \sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi v}{\sqrt{n-g_2}} =$$

$$= \cos 2\pi v g_2 \left\{ \sum_0^\infty \frac{\cos 2n\pi g_2}{\sqrt{n+v}} + \sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi g_2}{\sqrt{n-v}} \right\}$$

$$- \sin 2\pi v g_2 \left\{ \sum_0^\infty \frac{\sin 2n\pi g_2}{\sqrt{n+v}} - \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi g_2}{\sqrt{n-v}} \right\}.$$

Neemt men hierin $v = g_2 = a$, dan volgt de te bewijzen vergelijking

$$\sum_0^\infty \frac{\cos 2n\pi a}{\sqrt{n+a}} + \sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi a}{\sqrt{n+a}} =$$

$$= - \cot \pi a^2 \left\{ \sum_0^\infty \frac{\sin 2n\pi a}{\sqrt{n+a}} - \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi a}{\sqrt{n-a}} \right\}.$$

Vraagstuk LXXXVII.

D 2 b. Men vraagt te bewijzen

$$\lim_{x=\infty} \left[\sum_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)} - pe^x \right] = 0,$$

in welke vergelijking p een geheel positief getal beteekent.

(DR. J. C. KLUYVER.)

Oplossing *van* DR. J. C. KLUYVER.

Uit

$$\phi(x) = \sum_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}$$

vindt men na differentiatie

$$e^{-x}\phi'(x) - e^{-x}\phi(x) = \sum_0^{p-1} \frac{e^{-x}x^{\frac{n}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}.$$

Hieruit verkrijgt men door integratie

$$e^{-x}\phi(x) - 1 = \sum_0^{p-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \int_0^x e^{-x} x^{\frac{n}{p}-1}\, dx,$$

of ook

$$\phi(x) - pe^x = \sum_0^{p-1} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \int_0^x e^{-x} x^{\frac{n}{p}-1}\, dx - 1\right] e^x =$$

$$= -\sum_0^{p-1} \frac{e^x}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \int_x^\infty e^{-x} x^{\frac{n}{p}-1}\, dx.$$

Nu is volgens SCHLÖMILCH, Höhere Analysis II de volgende ontwikkeling geldig

$$\int_x^\infty e^{-v} v^{\frac{n}{p}-1}\, dv = e^{-x} x^{\frac{n}{p}-1} \left[1 - \frac{a_1}{(x+1)} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} \cdots\right]$$

waarin de coëfficiënten a_1, a_2, . . . van $n:p$ afhangen.

Men besluit hieruit tot

$$\phi(x) - pe^x = -\sum_0^{p-1} \frac{x^{\frac{n}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \left(1 - \frac{\theta_n}{x+1}\right);$$

zoodat, daar n steeds kleiner dan p blijft,

$$\lim_{x=\infty} [\phi(x) - pe^x] = 0.$$

Vraagstuk LXXXVIII.

F 1 d. Te bewijzen

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \vartheta_1\left(\tfrac{1}{6};\ 3\tau\right) \vartheta_1\left(\tfrac{2}{6};\ 3\tau\right) = \tfrac{1}{6} \vartheta_1\left(\tfrac{1}{6};\ 5\tau\right) \vartheta_1\left(\tfrac{1}{6};\ \tau\right),$$

waar de notatie van TANNERY et MOLK, Fonctions elliptiques is gevolgd. (DR. J. C. KLUYVER.)

Oplossing *van* DR. J. C. KLUYVER.

Voor $e^{\pi i\tau} = q$ en

$$q_0(\tau) = \Pi(1 - q^{2n}) = \frac{1}{\sqrt{3}} q^{-\frac{1}{12}} \vartheta_{11}\left(\tfrac{1}{3};\ \frac{\tau}{3}\right)$$

heeft men

$$\vartheta_1(v;\ 3\tau) = 2e^{\frac{3}{4}i\pi\tau} q_0(3\tau) \sin v\pi\ \Pi(1 - e^{6k\pi i\tau + 2\pi iv})(1 - e^{6k\pi i\tau - 2\pi iv}),$$

$$\vartheta_1(v + \tfrac{1}{5};\ 3\tau) =$$

$$= 2e^{\frac{3}{4}i\pi\tau} q_0(3\tau) \sin(v + \tfrac{1}{5})\pi\ \Pi(1 - e^{6k\pi i\tau + 2\pi iv + \frac{2}{5}\pi i})(1 - e^{6k\pi i\tau - 2\pi iv - \frac{2}{5}\pi i}),$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\vartheta_1(v + \tfrac{4}{5};\ 3\tau) =$$

$$= 2e^{\frac{3}{4}i\pi\tau} q_0(3\tau) \sin(v + \tfrac{4}{5})\pi\ \Pi(1 - e^{6k\pi i\tau + 2\pi iv + \frac{4}{5}\pi i})(1 - e^{6k\pi i\tau - 2\pi iv - \frac{4}{5}\pi i}).$$

Door vermenigvuldiging dezer vergelijkingen verkrijgt men

$$\vartheta_1(v;\ 3\tau)\,\vartheta_1(v + \tfrac{1}{5};\ 3\tau) \ldots \vartheta_1(v + \tfrac{4}{5};\ 3\tau) =$$
$$= 2^5 e^{\frac{15}{4}i\pi\tau} q_0(3\tau)^5 \sin v\pi \sin(v + \tfrac{1}{5}\pi) \ldots$$
$$\sin(v + \tfrac{4}{5})\pi\ \Pi(1 - e^{30k\pi i\tau + 10\pi iv})(1 - e^{30ki\pi\tau - 10\pi iv}).$$

Nu is echter

$$2^4 \sin v\pi \sin(v + \tfrac{1}{5}\pi) \ldots \sin(v + \tfrac{4}{5}\pi) = \sin 5v\pi$$

en

$$\vartheta_1(5v; 15\tau) = 2e^{\frac{15}{4}i\pi\tau} q_0(15\tau) \sin 5v\pi\ \Pi(1 - e^{30k\pi i\tau + 10\pi iv})(1 - e^{30k\pi i\tau - 10\pi iv}),$$

zoodat

$$\vartheta_1(5v;\ 15\tau) = \frac{q_0(15\tau)}{q_0(3\tau)^5}\,\vartheta_1(v;\ 3\tau)\,\vartheta_1(v + \tfrac{1}{5};\ 3\tau) \ldots \vartheta_1(v + \tfrac{4}{5};\ 3\tau).$$

Neemt men nu aan beide zijden $v = 0$ en bedenkt dat men heeft

$$\vartheta'_1(0;\ 15\tau) = e^{\frac{15}{4}\pi i\tau} q_0(15\tau)^3\ ,\quad \vartheta'_1(0;\ 3\tau) = e^{\frac{3}{4}\pi i\tau} q_0(3\tau)^3,$$

dan komt er

$$q_0(15\tau)^2 q_0(3\tau)^2 = \tfrac{1}{5} e^{-3\pi i\tau} \vartheta_1^2(\tfrac{1}{5};\ 3\tau)\,\vartheta_1^2(\tfrac{2}{5};\ 3\tau),$$

waaruit, zoo men $q_0(15\tau)$ en $q_0(3\tau)$ weder door ϑ_1-functies vervangt, door worteltrekking wordt gevonden

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,\vartheta_1(\tfrac{1}{5};\ 3\tau)\,\vartheta_1(\tfrac{2}{5};\ 3\tau) = \tfrac{1}{3}\,\vartheta_1(\tfrac{1}{3};\ 5\tau)\,\vartheta_1(\tfrac{1}{3};\ \tau).$$

Vraagstuk LXXXIX.

L' 16 a. Fen kromme van den tweeden graad, die de oneindig ver gelegen rechte in een der onbestaanbare cirkelpunten raakt, heeft hoogstens vier bestaanbare punten. Deze punten vormen een orthocentrische groep. (G. MANNOURY.)

Opgelost *door* G. MANNOURY, J. F. VAN OSS, DR. A. J. A. PRANGE *en* DR. P. H. SCHOUTE.

Oplossing *van* DR. P. H. SCHOUTE.

De kegelsneden, welke de oneindig ver gelegen rechte in het op $x + iy = 0$ gelegen cirkelpunt aanraken, worden voorgesteld door de vergelijking

$$(x + iy)^2 + (ax + by + c) + i(a'x + b'y + c') = 0.$$

Deze kromme bevat blijkbaar de snijpunten der gelijkzijdige hyperbolen

$$x^2 - y^2 + ax + by + c = 0,$$

$$2xy + a'x + b'y + c' = 0,$$

en deze vormen steeds een orthocentrische groep; immers het hoogtepunt van den driehoek, welke door drie der snijpunten wordt gevormd, moet op elke der beide hyperbolen liggen, valt dus in het vierde snijpunt.

Vraagstuk XC.

B 12 a. Wordt de geconjugeerde waarde der complexe grootheid u door u_c aangewezen, dan stelt de vergelijking

$$(au^2 + buu_c + cu + d) + (a_c u_c^2 + b_c u_c u + c_c u_c + d_c) = 0$$

een in het complexe vlak gelegen kegelsnede voor.

Als men de distributieve bewerking $p^c q \equiv \frac{1}{2}(pq_c + qp_c)$ invoert, dan is het linker lid dezer vergelijking „c-ontbindbaar" in twee factoren van den eersten graad. (G. MANNOURY.)

Oplossing *van* G. MANNOURY.

Substitueeren wij $u = x + iy$, $a = a_1 + ia_2$, $b = b_2 + ib_2$, enz. dan gaat de gegeven vergelijking over in

$$f(u) \equiv F(x, y) \equiv 2\{(a_1 + b_1)x^2 + (-a_1 + b_1)y^2 - 2a_2xy + c_1x - c_2y + d_1\} = 0,$$

waaruit blijkt dat zij een kegelsnede voorstelt.

Omgekeerd kan elke reëele kegelsnede, in het vlak XOY gelegen, door een vergelijking van de gegeven gedaante worden voorgesteld.

Om de c-ontbindbaarheid van $f(u)$ te bewijzen, brengen wij, wat op verschillende wijzen geschieden kan, $F(x, y)$ in de gedaante

$$\alpha\beta + \gamma\delta \equiv (l_1x + m_1y + n_1)(p_1x + q_1y + r_1) + (l_2x + m_2y + n_2)(p_2x + q_2y + r_2),$$

waar alle coëfficiënten reëel zijn. Wij verkrijgen dan

$$f(u) = \alpha\beta + \gamma\delta = (\alpha + i\gamma)^c(\beta + i\delta) =$$

$$= \{(l_1 + il_2)x + (m_1 + im_2)y + (n_1 + in_2)\}^c\{(p_1 + ip_2)x + (q_1 + iq_2)y + (r_1 + ir_2)\} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\{l(u + u_c) - im(u - u_c) + 2n\}^c\{p(u + u_c) - iq(u - u_c) + 2r\} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\{u(l - im) + u_c(l + im) + 2n\}^c\{u(p - iq) + u_c(p + iq) + 2r\}.$$

Opmerking. p^cq is niets anders als het inwendig product der door p en q bepaalde vectoren. Evenzoo kan

$$p^c iq = \tfrac{1}{2} ip_cq - \tfrac{1}{2} ipq_c = p_2q_1 - p_1q_2 = -q^c ip$$

als het uitwendig product dier vectoren worden opgevat. Met behulp van dit c-product kan elke rechte lijn, in het complexe vlak gelegen, door $u^cp = 1$ worden voorgesteld, waarin dan p de pool aanwijst van die rechte ten opzichte van den eenheidscirkel die den oorsprong tot middelpunt heeft.

De voorwaarde voor de collineaire ligging van drie punten is $a^cib + b^cic + c^cia = 0$, zooals door de substitutie $a = a_1 + ia_2$, enz. onmiddellijk blijkt.

Vraagstuk XCI.

K 22 b. Men vraagt een punt te construeeren van het regelvlak, dat beschreven wordt door eene rechte lijn, waarvan vier punten in gegeven vlakken moeten blijven. (W. Mantel).

Oplossing *van* W. Mantel.

Zij OABC het gegeven viervlak; de zijvlakken moeten door

een beschrijvende lijn in punten P, Q, R, S worden gesneden, die ten opzichte van elkander gegeven ligging hebben.

Neem een coördinatenstelsel aan met zijne assen langs OA, OB, OC. Stel dat de vergelijking van het vlak ABC is $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Noem (u, v, w) de coördinaten van een der punten L, waarin een bol, die met den straal één om O beschreven is, gesneden wordt door de lijn, die door O evenwijdig aan eene beschrijvende lijn getrokken wordt. Noem p, q, r de langs de beschrijvende lijn gemeten abscissen SP, SQ, SR. Een punt (x, y, z) op die beschrijvende lijn moge eene abscis ρ hebben; dan zijn de coördinaten van S $(x-\rho u, y-\rho v, z-\rho w)$; van P $(x-\rho u+pu$, enz); van Q $(x-\rho u+qu$, enz.); van R $(x-\rho u+ru$, enz.).

Uitdrukkende, dat P, Q, R, S in de gegeven vlakken liggen, hebben we

$$\frac{x-\rho u}{a}+\frac{y-\rho v}{b}+\frac{z-\rho w}{c}=1, \quad x-\rho u+pu=0,$$

$$y-\rho v+qv=0, \quad z-\rho w+rw=0.$$

Hieruit volgt

$$-\frac{pu}{a}-\frac{qv}{b}-\frac{rw}{c}=1.$$

Het punt L blijft dus in een plat vlak, dat wij construeeren door middel van zijn snijpunten met de coördinaatassen. In figuur 9 zijn α, β, γ die snijpunten; de doorsnede van het vlak $\alpha\beta\gamma$ met den eenheidsbol is als een cirkel (M) neergeslagen. Op dien cirkel is L willekeurig aangenomen. De lijn OL is eerst in den stand (rs) geteekend; daarna zijn de gegeven segmenten op haar uitgezet; eindelijk is zij zoover verschoven, dat R, P en Q in de juiste vlakken vielen. S komt dan tevens op zijn plaats.

Vraagstuk XCII.

K 1 c. De driehoeken ABC en A'B'C' liggen in hetzelfde vlak. De rechten MA, MB, MC snijden de zijden BC, CA, AB in M_a, M_b, M_c. Op de zijden B'C', C'A', A'B' bepaalt men de punten

M'_a, M'_b, M'_c, die hen in dezelfde verhoudingen verdeelen, als waarin BC, CA, AB door M_a, M_b, M_c worden verdeeld. Men vraagt naar de meetkundige plaats der punten M, waarvoor de rechten $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ door een punt M' gaan, en naar de meetkundige plaats van M'. (J. NEUBERG).

Opgelost *door* J. NEUBERG *en* DR. J. DE VRIES.

Oplossing.

I. Stel dat, met betrekking tot ABC als assendriehoek, m_1, m_2, m_3 de coördinaten van M zijn en de punten A', B', C' aangewezen worden door a_k, b_k, c_k ($k = 1, 2, 3$). Dan vindt men terstond voor de punten M'_a, M'_b, M'_c achtereenvolgens

$$x_k = \frac{b_k m_2 + c_k m_3}{m_2 + m_3}, \quad x_k = \frac{c_k m_3 + a_k m_1}{m_3 + m_1}, \quad x_k = \frac{a_k m_1 + b_k m_2}{m_1 + m_2}.$$

De rechte $M_aM'_a$ heeft dan tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & b_1 m_2 + c_1 m_3 \\ x_2 & m_2 & b_2 m_2 + c_2 m_3 \\ x_3 & m_3 & b_3 m_2 + c_3 m_3 \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$(b_3 m^2{}_2 - b_2 m_2 m_3 + c_3 m_2 m_3 - c_2 m^2{}_3)\, x_1 +$$
$$+ (b_1 m_2 m_3 + c_1 m^2{}_3)\, x_2 - (b_1 m^2{}_2 + c_1 m_2 m_3)\, x_3 = 0.$$

De vergelijkingen der rechten $M_bM'_b$ en $M_cM'_c$ worden hieruit gemakkelijk afgeleid.

Eliminatie van x_k tusschen de bedoelde drie vergelijkingen levert voor de meetkundige plaats van het punt M de vergelijking

$$\begin{vmatrix} b_3 m_2^2 + (c_3 - b_2) m_2 m_3 - c_2 m_3^2, & b_1 m_2 m_3 + c_1 m_3^2, & -c_1 m_2 m_3 - b_1 m_2^2 \\ -a_2 m_3 m_1 - c_2 m_3^2, & c_1 m_3^2 + (a_1 - c_3) m_3 m_1 - a_3 m_1^2, & c_2 m_3 m_1 + a_2 m_1^2 \\ a_3 m_1 m_2 + b_3 m_2^2, & -b_3 m_1 m_2 - a_3 m_1^2, & a_2 m_1^2 + (b_2 - a_1) m_1 m_2 - b_1 m_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Deze meetkundige plaats is dus een kromme van de 6e orde.

Voor $m_3 = 0$ vindt men

$$\begin{vmatrix} b_3 & 0 & -b_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & -b_3 & b_2 - a_1 \end{vmatrix} m_1^3 m_2^3 = 0.$$

Hieruit blijkt dat A, B en C drievoudige punten der gevonden kromme zijn.

II. Stelt men ter bekorting

$$a_2x_3 - a_3x_2 = A_{11}\,, \quad b_2x_1 - b_1x_2 + c_1x_3 - c_3x_1 = 2A_{23}\,,$$
$$b_3x_1 - b_1x_3 = A_{22}\,, \quad c_3x_2 - c_2x_3 + a_2x_1 - a_1x_2 = 2A_{31}\,,$$
$$c_1x_2 - c_2x_1 = A_{33}\,, \quad a_1x_3 - a_3x_1 + b_3x_2 - b_2x_3 = 2A_{12}\,,$$

dan gaan de vergelijkingen der rechten $M_aM'_a$, M_bM_b, $M_cM'_c$ over in

$$\left.\begin{aligned} A_{22}m_2^2 - 2A_{23}m_2m_3 + A_{33}m_3^2 &= 0\,,\\ A_{33}m_3^2 - 2A_{31}m_3m_1 + A_{11}m_1^2 &= 0\,,\\ A_{11}m_1^2 - 2A_{12}m_1m_2 + A_{22}m_2^2 &= 0.\end{aligned}\right\} \ldots\ldots 1).$$

Beschouwt men hier m_1, m_2, m_3 als loopende coördinaten, dan stellen deze vergelijkingen drie paren van rechten voor, die BC, CA, AB in drie puntenparen P_1, P_2; Q_1, Q_2; R_1, R_2 snijden.

Worden de rechten AP_1, BQ_1, CR_1, aangewezen door

$$m_2 = \alpha_1 m_3\,, \quad m_3 = \beta_1 m_1\,, \quad m_1 = \gamma_1 m_2\,,$$

dan is

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = 1$$

de voorwaarde waaronder deze lijnen in een punt samenkomen.

Evenzoo is

$$\alpha_2\beta_2\gamma_2 = 1$$

de voorwaarde waaronder AP_2, BQ_2, CR_2 door een zelfde punt gaan.

Nu is blijkbaar

$$A_{22}\alpha_1\alpha_2 = A_{33}\,, \quad A_{33}\beta_1\beta_2 = A_{11}\,, \quad A_{11}\gamma_1\gamma_2 = A_{22}\,,$$

dus

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 = 1.$$

Hieruit blijkt, dat wanneer de bovengenoemde drie lijnenparen het punt (AP_1, BQ_1, CR_1) gemeen hebben, ook AP_2, BQ_2, CR_2 door een zelfde punt moeten gaan. Met elk punt M′ zullen dus *twee* punten M overeenkomen.

Zijn nu P′ en P″ door B en C harmonisch van P_1 en P_2 gescheiden en hebben Q′, Q″ en R′, R″ de overeenkomstige beteekenis, dan liggen P′, Q′ en R′ in een rechte en is dit eveneens het geval met P″, Q″, R″.

Deze 6 punten liggen nu blijkbaar op de lijnenparen.

$$A_{22}m_2^2 + 2A_{23}m_2m_3 + A_{33}m_3^2 = 0,$$
$$A_{33}m_3^2 + 2A_{31}m_3m_1 + A_{11}m_1^2 = 0,$$
$$A_{11}m_1^2 + 2A_{12}m_1m_2 + A_{22}m_2^2 = 0,$$

dus in de kegelsnede

$$A_{11}m_1^2 + A_{22}m_2^2 + A_{33}m_3^2 + 2A_{11}m_1m_2 + 2A_{23}m_2m_3 + 2A_{31}m_3m_1 = 0.$$

En daar deze uit twee rechten moet bestaan, wanneer de drie lijnenparen van stelsel 1) gemeenschappelijke punten bezitten, moet voldaan worden aan de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

De kubische kromme, welke door deze vergelijking wordt aangewezen, is evenwel slechts een deel der meetkundige plaats van het punt M'. Immers aan het stelsel 1) kan ook voldaan worden door

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad A_{33} = 0,$$

dus door

$$c_1x_2 - c_2x_1 = 0.$$

D. w. z. als M in C komt, kan men elk punt van de rechte CC' als het punt M' beschouwen. Dit volgt ook hieruit, dat dan M_a en M_b met C, dus M'_a en M'_b met C' samenvallen, zoodat $M_aM'_a$ en $M_bM'_b$ beide in CC' liggen.

Opmerkingen. 1. Bij de bepaling van de m.pl. van M' is gebruik gemaakt van een methode van den Heer Neuberg, welke in verband staat met de oplossing van vraagstuk 47 van dit deel (bl. 88).

2. Aan een schriftelijke mededeeling van den Heer Neuberg ontleenen wij het volgende.

Het gestelde vraagstuk is een uitbreiding van een vraagstuk, dat in *Mathesis* (onder no. 785) door Lemoine gesteld is, en waar de punten A', B', C' de projecties van A, B, C op de overstaande zijden zijn.

Voor dit bijzonder geval vond Emmerich (*Mathesis*, 1900, bl. 44) dat de meetkundige plaats van M uit een kegelsnede

en een kromme van den vierden graad bestaat. Verder toonde de Heer NEUBERG aan dat de meetkundige plaats van M′ een kubische kromme is.

Het ware van belang te onderzoeken of de m.pl. van M ook in het algemeene geval te splitsen is in twee krommen.

(RED.)

Vraagstuk XCIII.

K 1 c. Met betrekking tot de zijden van een gegeven driehoek bepaalt men de spiegelbeelden M_a, M_b, M_c van een in zijn vlak gelegen punt M. Men vraagt aan te toonen, dat in deze drie punten massa's zoodanig kunnen aangebracht worden, dat hun zwaartepunt onafhankelijk is van de ligging van M.

(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, P. BAKKER, J. A. BARRAU, J. A. KERKHOVEN, DR. A. J. A. PRANGE, DR. P. H. SCHOUTE *en* DR. J. DE VRIES.

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

Als de stelling waar is, moet het gemeenschappelijk zwaartepunt der drietallen van massa's in het hoogtepunt H van den driehoek liggen. Want als M in het hoekpunt A valt, komt het zwaartepunt blijkbaar op de hoogtelijn AD (fig. 10); ligt M in B, dan bevat de hoogtelijn BE het zwaartepunt.

Noemen we de massa's in M_a, M_b, M_c achtereenvolgens α, β, γ, dan levert de momentenstelling als M in A ligt

$$\alpha\,(AD + HD) = (\beta + \gamma)\,AH,$$

en als M in B is geplaatst,

$$\beta\,(BE + HE) = (\alpha + \gamma)\,BH.$$

Hieruit vindt men gemakkelijk

$$\alpha : \beta : \gamma = AH\,.\,BE : BH\,.\,AD : (HE\,.\,AD + BE\,.\,HD),$$

of, daar $BC : BE = AC : AD$ is,

$$\alpha : \beta : \gamma = AH\,.\,BC : BH\,.\,AC : CH\,.\,AB.$$

Stelt men de oppervlakken der driehoeken ABC, HBC, HCA en HAB door Δ, Δ_a, Δ_b en Δ_c voor, dan is dus

$$\alpha : \beta : \gamma = (\Delta_b + \Delta_c) : (\Delta_c + \Delta_a) : (\Delta_a + \Delta_b),$$

of

$$\alpha : \beta : \gamma = (\Delta - \Delta_a) : (\Delta - \Delta_b) : (\Delta - \Delta_c).$$

Nu moet nog bewezen worden, dat, voor deze verhouding der massa's, H het zwaartepunt van M_a, M_b, M_c is, wanneer M willekeurig ligt. Worden zijn afstanden tot de zijden door p, q, r aangewezen, dan levert de momentenstelling voor den afstand x van het zwaartepunt tot BC de betrekking

$$2\Delta x = (\Delta_a + \Delta_b)(p + 2r\cos B) + (\Delta_a + \Delta_c)(p + 2q\cos C) - (\Delta_b + \Delta_c)p.$$

Maar

$$\cos B = HD : HC \text{ en } \Delta_a + \Delta_b = \tfrac{1}{2} HC \,.\, AB;$$

$$\cos C = HD : HB \text{ en } \Delta_a + \Delta_c = \tfrac{1}{2} HB \,.\, AC.$$

Dus wordt

$$\Delta x = \tfrac{1}{2} HD\,(r \,.\, AB + q \,.\, AC + p \,.\, BC)$$

of $x = HD$.

Het zwaartepunt ligt derhalve in H.

Opmerkingen. I. Men kan gemakkelijk aantoonen, dat

$$\alpha : \beta : \gamma = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C \quad \text{is.}$$

II. Als M op cirkel ABC ligt, worden zijn projecties op de zijden door de rechte van Wallace verbonden. Dan zijn dus M_a, M_b, M_c eveneens in een rechte gelegen, die tevens door het hoogtepunt gaat. (Red.)

Vraagstuk XCIV.

M² 9 d α. Gegeven zijn een bollenbundel en een rechte l. Men vraagt het oppervlak te onderzoeken, dat gevormd wordt door de groote cirkels, welke deze bollen gemeen hebben met de vlakken door l. (J. Neuberg.)

Opgelost *door* Dr. P. H. Schoute, Dr. C. Stolp *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* Dr. C. Stolp.

1. *Algemeene beschouwingen.* De as l van den vlakkenbundel beschouwen wij als de doorsnede van twee bekende

vlakken $V_0 = 0$, $W = 0$, den basiscirkel van den bollenbundel als doorsnede van den bol $B_0 = 0$ met het platte vlak $V'_0 = 0$. De bundels zelve worden voorgesteld door de vergelijkingen

$$V_\lambda \equiv V_0 - \lambda W = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1),$$

$$B_\lambda \equiv B_0 - 2\lambda V'_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 2).$$

Elk vlak V_λ snijdt den overeenkomstigen bol B_λ volgens een cirkel C_λ, die bij verandering van λ het oppervlak van den derden graad voortbrengt, dat beantwoordt aan

$$B_0 W - 2V_0 V'_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 3).$$

Al dadelijk springt hier de verwisselbaarheid van V_0 en V'_0 in het oog, zoodat hetzelfde oppervlak ook voortgebracht wordt door een veranderlijken cirkel C'_μ, die de doorsnede is van

$$V'_\mu \equiv V'_0 - \mu W = 0,$$

$$B'_\mu \equiv B_0 - 2\mu V_0 = 0.$$

De as $V'_0 = 0$, $W = 0$ van den vlakkenbundel (V'_μ) zullen wij door l' aanduiden. Uit 1) en 2) blijkt, dat deze as deel uitmaakt van den cirkel C_∞. Omgekeerd vindt men door $\mu = \infty$ te nemen, dat in het tweede cirkelstelsel C'_∞ de as l van den vlakkenbundel 1) bepaalt. Door beurtelings $\lambda = 0$ en $\mu = 0$ te nemen, ziet men, dat C_0 de basiscirkel van den bundel (B'_μ), en omgekeerd C'_0 die van (B_λ) is. De assen l en l' liggen in het vlak $W = 0$, de twee basiscirkels op den bol $B_0 = 0$.

Elke bol kan voorgesteld worden door een vergelijking van den vorm $B_0 = V$, waarin V van den eersten graad is. De doorsnede van dezen bol met het oppervlak 3) wordt bepaald door de vergelijkingen

$$VW - 2V_0 V'_0 = 0 \ , \quad B_0 = V,$$

en is bijgevolg een kromme van den *vierden* graad. Deze zal uit twee cirkels bestaan, wanneer men den bol laat gaan door een cirkel C_λ van het eerste stelsel. De vergelijking van dien bol heeft dan de gedaante $B_\lambda - 2\mu V_\lambda = 0$, of ook volgens 1) en 2)

$$B_0 - 2\lambda V'_0 - 2\mu V_0 + 2\lambda\mu W = 0 \ldots\ldots 4).$$

Door een andere samenvoeging van termen laat zich deze

vergelijking tot de gedaante $B'_\mu - 2\lambda V'_\mu = 0$ brengen, waaruit blijkt, dat de tweede cirkeldoorsnede een cirkel C'_μ van het *tweede* stelsel is. Op denzelfden bol kan geen *derde* cirkel van het oppervlak 3) liggen; het is dus onmogelijk door twee cirkels van één stelsel een bol te brengen. Daarentegen kan men, daar λ en μ geheel onafhankelijk van elkaar zijn, altijd een bol brengen door twee cirkels, die tot verschillende stelsels behooren. Neemt men een bepaald punt P van het oppervlak, dan zijn de door dit punt gaande cirkels C_λ en C'_μ gemakkelijk te construeeren en evenzoo het middelpunt Q van den bol, die er door gaat. De rechte PQ is dan de normaal aan het oppervlak in 't punt P en het raakvlak in P is daardoor eveneens bepaald.

Niet zonder gewicht is de opmerking, dat elk vlak evenwijdig met de assen l en l' van de vlakkenbundels V_λ en V'_μ het oppervlak snijdt volgens een kegelsnede. Het oppervlak kan namelijk ook worden voortgebracht door een bundel van quadratische oppervlakken

$$V_0 V'_0 - \nu B_0 = 0$$

(met het cirkelpaar C_0, C'_0 als basiskromme) en den bundel van evenwijdige vlakken

$$W = 2\nu.$$

De middelpunten der bollen B_λ liggen op een rechte, die door den vlakkenbundel V_λ gesneden wordt volgens een puntenreeks, welke projectief is met de reeks der bolmiddelpunten. Die twee puntenreeksen kunnen natuurlijk ook identiek zijn, en dit is in ons vraagstuk ondersteld.

2. *Vergelijking van het te onderzoeken oppervlak.* Kiest men het coördinatenstelsel zóó, dat de vergelijking van den bollenbundel wordt

$$B_\lambda \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 2\lambda z = 0 \quad \ldots\ldots \quad 5),$$

dan kan men nog de x-as zóó draaien, dat zij de gegeven rechte l loodrecht kruist. Maakt de laatste nu een hoek β met het xy-vlak, dan is zij voor te stellen door de vergelijkingen

$$x = a \ , \quad my + z = c \ , \quad (m = \operatorname{tg}\beta) \quad \ldots\ldots \quad 6).$$

Een vlak V_0 door l en door den oorsprong O gaande heeft dan tot vergelijking

$$V_0 \equiv cx - amy - az = 0,$$

en de vlakkenbundel

$$V_\lambda \equiv cx - amy - az - \lambda(x - a) = 0 \quad \ldots\ldots 7)$$

zal nu den bollenbundel 5) snijden volgens een stelsel *groote* cirkels C_λ.

Door eliminatie van λ uit 5) en 7) vindt men voor het oppervlak de vergelijking

$$(x - a)(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) - 2z(cx - amy - az) = 0 \quad \ldots 8).$$

Het stelsel cirkels C'_μ ontstaat uit de snijding van de bundels

$$B'_\mu \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 2\mu(cz - amy - az) = 0 \ldots 9),$$

$$V'_\mu \equiv z - \mu(x - a) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10).$$

Deze cirkels zijn, met uitzondering van C'_0, *kleine* cirkels van de bollen B'_μ. De as l' van V'_μ ligt met l in het vlak $x = a$ en snijdt l in het punt $A(a, c\cot\beta, 0)$. Elke rechte door A getrokken ligt in twee vlakken V_λ en V'_μ. Ze snijdt het oppervlak behalve in het punt A nog in twee punten P en P', die tevens snijpunten van twee cirkels C_λ en C'_μ zijn, waardoor een bol B kan gaan, die volgens 4) tot vergelijking heeft

$$B \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 2\lambda z - 2\mu(cx - amy - az) + 2\lambda\mu(x - a) = 0 \ldots 11).$$

De coördinaten van het middelpunt Q zijn

$$x = \mu c - \lambda\mu\,, \quad y = -\mu a \operatorname{tg}\beta\,, \quad z = \lambda - \mu a \ldots\ldots 12)$$

en de rechten PQ, P'Q zijn de normalen van het oppervlak in P en P'.

Uit de vergelijkingen 12) kan men beurtelings μ en λ elimineeren. In het eerste geval krijgt men de assen der cirkels C_λ, in het laatste geval die van de cirkels C'_μ. Beide stelsels van rechten liggen op de hyperbolische paraboloïde

$$y^2 - myz + cmy + am^2x = 0 \ldots\ldots\ldots 13),$$

welke vergelijking uit 12) gevonden wordt door λ en μ te elimineeren.

Dit oppervlak is dus de meetkundige plaats van de middelpunten der bollen, die het oppervlak 8) volgens cirkels snijden. Op deze paraboloïde ligt ook de kubische kromme, die de middelpunten der kleine cirkels C'_μ bevat.

3. *Kegelsneden op het oppervlak.* Gelijk reeds vroeger werd opgemerkt, snijden de vlakken evenwijdig met de rechten l en l' volgens kegelsneden. Die vlakken zijn hier loodrecht op de x-as; de projecties dier kegelsneden op YOZ worden dus voorgesteld door de vergelijking 8), wanneer x als een standvastige wordt beschouwd. Naar y en z gerangschikt neemt zij de volgende gedaante aan

$$(x-a)y^2+2amyz+(x+a)z^2-2cxz+(x-a)(x^2-r^2)=0 \,..\, 14).$$

De kegelsnede zal een hyperbool, een parabool of een ellips zijn, naar gelang

$$(a \operatorname{tg} \beta)^2-(x-a)(x+a)$$

positief, nul of negatief, of x^2 kleiner dan, gelijk aan of grooter dan $a^2 \sec^2 \beta$ is. Het middelpunt zal op de kegelsnede liggen, en haar vlak bijgevolg *raakvlak* aan het oppervlak zijn, als men heeft

$$\begin{vmatrix} x-a & a\operatorname{tg}\beta & 0 \\ a\operatorname{tg}\beta & x+a & -cx \\ 0 & -cx & (x-a)(x^2-r^2) \end{vmatrix}$$

$$\equiv (x-a)\,[(x^2-a^2\sec^2\beta)(x^2-r^2)-c^2x^2]=0 \;.\;.\;.\; 15).$$

Deze vergelijking van den *vijfden* graad stelt vijf verschillende raakvlakken voor, die loodrecht op de x-as staan. Is $r^2>0$, dan zijn die vlakken alle vijf bestaanbaar. Immers wanneer men in den tusschen [ ] geplaatsten vorm voor x achtereenvolgens de waarden $-\infty$, $-a\sec\beta$, 0, $+a\sec\beta$, $+\infty$ substitueert, krijgt die vorm de waarden $+\infty$, $-a^2c^2\sec^2\beta$, $a^2r^2\sec^2\beta$, $-a^2c^2\sec^2\beta$, $+\infty$, die afwisselend positief en negatief zijn. De drie tusschen $-a\sec\beta$ en $+a\sec\beta$ gelegen wortels van 15) leveren drie paar bestaanbare rechten als doorsneden, de andere twee geven slechts de raakpunten.

De middelpunten der kegelsneden liggen op een kubische kromme, die, met de oneindig ver gelegen rechte van YOZ, de doorsnede vormt van de hyperbolische paraboloïden

$$\left.\begin{aligned} xy+amz-ay&=0, \\ xz-cx+amy+az&=0. \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 16).$$

Deze kubische ruimtekromme wordt voorgesteld door

$$y = \frac{-acx \operatorname{tg} \beta}{x^2 - a^2 \sec^2 \beta}, \quad z = \frac{cx(x-a)}{x^2 - a^2 \sec^2 \beta} \quad \ldots . 17).$$

Hierin de wortels van 15) substitueerende vindt men de coördinaten der raakpunten van de raakvlakken die loodrecht op de x-as staan.

Het is niet moeilijk, in te zien, dat de assen der kegelsneden twee stelsels van evenwijdige rechten vormen, die de rechten l en l' onder gelijke hoeken kruisen. De eenige as van de ééne parabolische doorsnede behoort tot het ééne, die van de andere tot het andere stelsel.

4. *Verschillende gedaanten van het oppervlak. Navelpunten.* Van de vijf raakvlakken 15) zijn er minstens drie bestaanbaar. Het vlak $x = a$ raakt het oppervlak in A en snijdt het volgens de twee rechten l en l'; twee andere raakvlakken $x = \pm p$ $(p^2 > a^2 \sec^2 \beta)$ raken het oppervlak zonder het te snijden. Tusschen de laatste twee vlakken is het geheele oppervlak gelegen. De bestaanbaarheid van de overige twee raakvlakken hangt af van het teeken van r^2; alzoo zijn er drie soorten van oppervlakken evenals men drie soorten van bollenbundels B_λ onderscheidt.

1e Geval. De bollen B_λ snijden hun machtvlak $z = 0$ volgens een bestaanbaren cirkel (straal r). De z-as snijdt het oppervlak niet; het laatste vormt een keel om de z-as. Twee vlakken loodrecht op de x-as raken het oppervlak in de keel en snijden het volgens twee rechten.

2e Geval. De bollen B_λ raken het machtvlak in den oorsprong (straal van den basiscirkel $= 0$). De keel van het oppervlak vernauwt zich tot een kegelpunt met een quadratischen raakkegel, waarvan men de vergelijking vindt, door in 8) de termen van den derden graad te schrappen en $r = 0$ te stellen. De twee keelraakvlakken $x^2 = 0$ vallen samen en snijden het oppervlak volgens twee rechten, die tevens tot den raakkegel behooren.

3e Geval. De bollen B_λ snijden het machtvlak *niet*, of liever ze snijden dat vlak volgens een cirkel met den imaginairen straal $r = ir'$. Een bol uit O als middelpunt met r' als straal beschreven snijdt alle bollen B_λ onder rechte hoeken en de as

dier bollen (hier de z-as) in de twee grenspunten. Hetzelfde geldt voor de bollen B'_μ. De grenspunten der bollen B_λ zijn tevens *navelpunten* van het oppervlak; die van de bollen B'_μ daarentegen *niet*. De straal van den *grooten* cirkel C_λ kan namelijk alleen nul worden met den straal van den bol B_λ zelven; die van den kleinen cirkel C'_μ wordt nul, als het vlak van dien cirkel raakvlak wordt aan den bol B'_μ. Alvorens dit bijzonder geval te beschouwen willen wij den straal ρ van C'_μ in μ trachten uit te drukken.

Zij R'_μ de straal van den bol B'_μ en d de afstand van het middelpunt tot het vlak V'_μ, dan is

$$\rho^2 = R'^2_\mu - d^2.$$

De afstand van een punt (x, y, z) tot het vlak V'_μ, [vergelijking 10)] is

$$\pm \frac{\mu(x-a) - z}{\sqrt{\mu^2+1}}.$$

Hierin de coördinaten van het middelpunt van B'_μ [verg. 9)] substitueerende heeft men

$$d = \pm \frac{\mu(\mu c - a) + \mu a}{\sqrt{\mu^2+1}} = \frac{\mu^2 c}{\sqrt{\mu^2+1}}.$$

Voor den bolstraal vindt men uit 9) gemakkelijk

$$R'_\mu = \sqrt{\mu^2 c^2 + \mu^2 a^2 \sec^2\beta + r^2},$$

zoodat men heeft

$$\rho^2 = r^2 + \mu^2 a^2 \sec^2\beta + \frac{\mu^2 c^2}{1+\mu^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18).$$

Is r bestaanbaar, dan kan ρ dus niet nul worden. De kleinste waarde van ρ is die van den cirkel C'_0 (n.l. $\rho = r$), die in dit geval *groote* cirkel van den bol B_0 is. Is r onbestaanbaar $= r'i$, dan vindt men uit 18) door $\rho = 0$ te stellen de vierdemachtsvergelijking

$$a^2 \sec^2\beta \,.\, \mu^4 + (c^2 + a^2 \sec^2\beta - r'^2)\mu^2 - r'^2 = 0 \quad \ldots \quad 19),$$

die één positieve waarde voor μ^2 en dus twee bestaanbare waarden voor μ oplevert, waarmede twee vlakken V'_μ overeenkomen, die het oppervlak elk in een navelpunt raken.

In beide vlakkenbundels komen vlakken voor, die geen bestaanbare cirkels met het oppervlak gemeen hebben. In elk dier vlakken ligt echter de tot het oppervlak behoorende as (l of l') van den bundel, zoodat ook in het 3e geval het oppervlak één samenhangend geheel blijft uitmaken.

5. *Bijzondere gevallen.* *a.* Is de gegeven rechte l evenwijdig met het machtvlak van den bollenbundel, dan is $\beta = 0$ en het oppervlak 8) symmetrisch ten opzichte van het xz-vlak. De parabolische doorsneden liggen dan in de vlakken $x = \pm a$. Stelt men nu in 14) $\beta = 0$, $x = + a$, dan krijgt men

$$z^2 - cz = 0$$

d. w. z. de parabool is hier in twee evenwijdige rechten ontaard en deze rechten zijn de assen l en l' der vlakkenbundels. De andere parabolische doorsnede ($\beta = 0$, $x = - a$) heeft tot vergelijking

$$y^2 - cz + a^2 - r^2 = 0.$$

Voor $\beta = 0$ geven de vergelijkingen 17) geen bruikbare uitkomsten. Uit 16) blijkt dan ook, dat in dit geval de vergelijkingen worden

$$y(x - a) = 0 \ , \quad xz - cx + az = 0,$$

en de kubische kromme vervangen is door een hyperbool in het xz-vlak en de rechte $x = a$, $z = \frac{1}{2}c$ loodrecht op dat vlak. De eerste is de eigenlijke meetkundige plaats van de middelpunten der kegelsneden; de tweede bevat de middelpunten van het paar in het vlak $x = a$ gelegen evenwijdige rechten l en l'.

b. Is $c = 0$, dan gaat l door de x-as en is elk punt van de x-as het middelpunt van een der kegelsneden door 14) voorgesteld. Dit blijft waar voor de parabolische doorsneden $x = \pm a \sec \beta$, die bijgevolg elk in een paar evenwijdige rechten ontaard zijn. In overeenstemming hiermede moeten de vergelijkingen 16) in plaats van een kubische kromme drie rechten leveren, n.l. de x-as en de twee assen van de twee paren evenwijdige rechten. Dit alles laat zich natuurlijk ook uit de vergelijkingen zelve afleiden.

Is èn $\beta = 0$ èn $c = 0$, dan wordt 14) de assenvergelijking

eener kegelsnede en worden ook de overige vergelijkingen vrij eenvoudig. De rechten l en l' vallen dan samen.

c. Men kan zich ook voorstellen, dat l op oneindigen afstand ligt. Deelt men 8) door a en stelt dan $a = \infty$, dan krijgt men

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2yz \operatorname{tg} \beta - r^2 = 0,$$

d. i. een éénbladige hyperboloïde, een quadratischen kegel of een tweebladige hyperboloïde, naargelang r^2 positief, nul of negatief is.

Vraagstuk XCV.

P 6 f. Gegeven is een bundel kegelsneden. Aan elk punt P van zijn vlak voegt men de rechte p toe, welke in P door een kegelsnede van den bundel geraakt wordt. Onderzoek de verwantschap (P, p). (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* DR. P. H. SCHOUTE, P. G. TIDDENS *en* DR. J. DE VRIES.

Oplossing *van* DR. P. H. SCHOUTE.

1. De bundel bevat één kegelsnee, die door een gegeven punt P gaat, en twee kegelsneden, die een gegeven lijn p aanraken. In de verwantschap (P, p) komt dus met een gegeven punt P een enkele lijn p overeen, terwijl bij een gegeven lijn p twee punten P behooren; wij drukken dit uit door het teeken $(\overset{2}{P}, \overset{1}{p})$.

Aan een basispunt van den bundel is elke straal door dat punt toegevoegd.

Bestaat er tusschen de samenstellende deelen der figuur (P, p) een verwantschap $(\overset{m}{P}, \overset{n}{p})$, dan zal p een kromme van de klasse $m + n$ omhullen, als P een rechte doorloopt, en P een kromme van den graad $m + n$ beschrijven, als p om een punt draait. Want, doorloopt P de lijn l, dan zal men $m+n$ raaklijnen kunnen trekken aan de omhullende van p uit een willekeurig punt Q van l, n.l. de n standen van p, die bij Q behooren, en de lijn l zelve m maal geteld. En langs dualistisch tegengestelden weg wordt het tweede gedeelte der stelling

bewezen. In het onderhavige geval vinden wij bij een lijn van punten P een kromme van de derde klasse omhuld door lijnen p en bij een stralenbundel van lijnen p een kromme der derde orde van punten P.

2. Wij onderzoeken verder de blijkbaar involutorische verwantschap tusschen de puntenparen P, die bij een zelfde lijn behooren. Daartoe bepalen wij de hoofdpunten dezer verwantschap. Klaarblijkelijk wordt het bij P behoorende punt P′ alleen dan onbepaald, als P samenvalt met een der drie diagonaalpunten L, M, N van den volledigen vierhoek ABCD der basispunten van den kegelsneebundel. Valt P in L, dan wordt p onbepaald en ligt P′ op de meetkundige plaats der raakpunten van de raaklijnen uit L aan de kegelsneden van den bundel; deze meetkundige plaats is klaarblijkelijk de lijn MN. Dus bezit de involutorische verwantschap (P, P′) drie hoofdpunten L, M, N van den eersten graad, waarmee de overstaande zijden MN, NL, LM van driehoek LMN overeenkomen. Derhalve is deze verwantschap een quadratische en doorloopt P′ een om LMN beschreven kegelsnee, als P een rechte beschrijft.

Vraagstuk XCVI.

K 1 d. Op de zijden van een driehoek ABC beschrijft men buitenwaarts de rechtstreeks gelijkvormige driehoeken BCP_a, CAP_b, ABP_c, die rechthoekig zijn in P_a, P_b, P_c en binnenwaarts de daaraan gelijkvormige driehoeken BCP'_a, CAP'_b, ABP'_c, die rechthoekig zijn in P'_a, P'_b, P'_c. Noemt men de zwaartepunten dier driehoeken Z_a, Z_b, Z_c; Z'_a, Z'_b, Z'_c, dan is

$$\text{Inh. } P_aP_bP_c + \text{Inh. } P'_aP'_bP'_c = 2 \text{ Inh. ABC},$$
$$\text{Inh. } Z_aZ_bZ_c + \text{Inh. } Z'_aZ'_bZ'_c = \tfrac{2}{3} \text{ Inh. ABC}$$

(Dr. A. J. A. Prange.)

Opgelost *door* Mej. C. H. de Haas, Mevr. A. G. Kerkhoven—Wythoff *en* Dr. A. J. A. Prange.

Oplossing *van* Mej. C. H. de Haas.

I. $$\Delta P_aP_bP_c = \Delta ABC + \Delta BCP_a + \Delta CAP_b + \Delta ABP_c - \Delta AP_bP_c - \Delta BP_cP_a - \Delta CP_aP_b;$$

$$\Delta P'_aP'_bP'_c = \Delta ABC - \Delta BCP'_a - \Delta CAP'_b - \Delta ABP'_c$$
$$+ \Delta AP'_bP'_c + \Delta BP'_cP'_a + \Delta CP'_aP'_b;$$

dus

$$\Delta P_aP_bP_c + \Delta P'_aP'_bP'_c = 2\Delta ABC +$$
$$\Delta AP'_bP'_c - \Delta AP_bP_c + \Delta BP'_cP'_a - \Delta BP_cP_a + \Delta CP'_aP'_b - \Delta CP_aP_b$$
$$= 2\Delta ABC + \tfrac{1}{2}\, AP_b \times AP_c\,[\sin(90^\circ - A) - \sin(90^\circ + A)]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, BP_c \times BP_a\,[\sin(90^\circ - B) - \sin(90^\circ + B)]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, CP_a \times CP_b\,[\sin(90^\circ - C) - \sin(90^\circ + C)] = 2\Delta ABC,$$

daar elk der vormen tusschen de vierkante haakjes gelijk is aan nul.

II. Stelt men ter bekorting $AZ'_b = p$, $AZ'_c = q$, $BZ'_c = r$, $BZ'_a = s$, $CZ'_a = u$, $CZ'_b = t$, $\angle BAZ'_c = x$, $\angle ABZ'_c = y$, dan is

$$\Delta Z_aZ_bZ_c = \Delta ABC + \Delta BCZ_a + \Delta CAZ_b + \Delta ABZ_c$$
$$- \tfrac{1}{2}pq\sin(A+x+y) - \tfrac{1}{2}rs\sin(B+x+y) - \tfrac{1}{2}tu\sin(C+x+y),$$
$$\Delta Z'_aZ'_bZ'_c = \Delta ABC - \Delta BCZ'_a - \Delta CAZ'_b - \Delta ABZ'_c$$
$$- \tfrac{1}{2}pq\sin(A-x-y) - \tfrac{1}{2}rs\sin(B-x-y) - \tfrac{1}{2}tu\sin(C-x-y).$$

Dus

$$\Delta Z_aZ_bZ_c + \Delta Z'_aZ'_bZ_c = 2\Delta ABC$$
$$- \cos(x+y)\,[pq\sin A + rs\sin B + tu\sin C].$$

Wegens de betrekkingen $p : t : b = r : q : c = u : s : a$ kan hiervoor geschreven worden

$$2\Delta ABC - \cos(x+y)\left[\frac{utc}{a}\sin A + \frac{utc}{b}\sin B + tu\sin C\right]$$
$$= 2\Delta ABC - 3tu\cos(x+y)\sin C$$
$$= 2\Delta ABC - 3\sin C\,[u\cos y\,(t\cos x) - u\sin y\,(t\sin x)]$$
$$= 2\Delta ABC - 3\sin C\left[u\cos y\,\frac{sb}{a}\cos x - u\sin y\,\frac{sb}{a}\sin x\right].$$

Is V de projectie van Z'_a op BC en M het midden van BC, dan kan de laatste vorm vervangen worden door

$$2\Delta ABC - \frac{3b}{a}\sin C\,[CV \times BV - Z'_aV^2]$$
$$= 2\Delta ABC - \frac{3b}{a}\sin C\,[\tfrac{1}{4}a^2 - MV^2 - Z'_aV^2]$$

$$= 2\,\Delta\,\mathrm{ABC} - \frac{3b}{a}\sin\mathrm{C}\,[\tfrac{1}{4}a^2 - (\tfrac{1}{6}a)^2]$$

$$= 2\,\Delta\,\mathrm{ABC} - \frac{3b}{a}\sin\mathrm{C}\times\tfrac{2}{9}a^2 =$$

$$= 2\,\Delta\,\mathrm{ABC} - \tfrac{2}{3}ab\sin\mathrm{C} = 2\,\Delta\,\mathrm{ABC} - \tfrac{4}{3}\,\Delta\,\mathrm{ABC} = \tfrac{2}{3}\,\Delta\,\mathrm{ABC}.$$

Oplossing *van* Mevr. A. G. Kerkhoven—Wythoff.

I. Zij $\angle\,\mathrm{BCP}_a = \phi$ en ε^ϕ de versor, die elke lijn in het vlak van den driehoek een hoek ϕ omdraait, dan is, als wij $\mathrm{CA} = \alpha$ en $\mathrm{CB} = \beta$ stellen,

$$\mathrm{CP}_a = \cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^\phi\,, \qquad \mathrm{CP}'_a = \cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^{-\phi},$$

$$\mathrm{CP}_b = \alpha - \cos\phi\,.\,\alpha\varepsilon^\phi\,, \qquad \mathrm{CP}'_b = \alpha - \cos\phi\,.\,\alpha\varepsilon^{-\phi},$$

$$\mathrm{CP}_c = \beta + \cos\phi\,.\,(\alpha - \beta)\,\varepsilon^\phi\,, \qquad \mathrm{CP}'_c = \beta + \cos\phi\,.\,(\alpha - \beta)\,\varepsilon^{-\phi}.$$

Verder is

$$\mathrm{P}_a\mathrm{P}_b = \alpha - \cos\phi\,.\,\alpha\varepsilon^\phi - \cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^\phi\,,$$

$$\mathrm{P}_a\mathrm{P}_c = \beta + \cos\phi\,.\,\alpha\varepsilon^\phi - 2\cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^\phi.$$

$$2\times\text{Inhoud}\ \mathrm{P}_a\mathrm{P}_b\mathrm{P}_c = \mathrm{TV}\,.\,\mathrm{P}_a\mathrm{P}_b\,.\,\mathrm{P}_a\mathrm{P}_c = \mathrm{TV}\,\{\alpha\beta + \cos\phi\,.\,\alpha^2\varepsilon^\phi -$$

$$- 2\cos\phi\,.\,\alpha\beta\varepsilon^\phi - \cos\phi\alpha\varepsilon^\phi\beta + 2\cos^2\phi\,.\,\alpha\beta - \cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^\phi\beta - \cos^2\phi\,.\,\beta\alpha\} =$$

$$= \mathrm{TV}\,\{\alpha\beta + 3\cos^2\phi\,.\,\alpha\beta + \cos\phi\,.\,\alpha^2\varepsilon^\phi - \cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^\phi\beta - 2\cos\phi\,.\,\alpha\beta\varepsilon^\phi -$$

$$- \cos\phi\alpha\,.\,\varepsilon^\phi\beta\}.$$

$2\times$Inhoud $\mathrm{P}'_a\mathrm{P}'_b\mathrm{P}'_c$ verschilt hiervan alleen daarin dat $\varepsilon^{-\phi}$ in de plaats komt van ε^ϕ.

Beide inhouden zijn gelijk aan den tensor van een som van vectoren, die alle dezelfde richting hebben, n.l. loodrecht op het vlak van den driehoek, omdat elk deel het produkt is van twee vectoren in dat vlak. Daarom is de TV van de som gelijk aan de TV van de afzonderlijke deelen.

Voor de dubbele som der twee inhouden heeft men dus

$$\mathrm{TV}\,\{2\alpha\beta + 6\cos^2\phi\,.\,\alpha\beta + \cos\phi\,.\,\alpha(\alpha\varepsilon^\phi + \alpha\varepsilon^{-\phi}) - \cos\phi\,.\,\beta(\varepsilon^\phi\beta + \varepsilon^{-\phi}\beta) -$$

$$- 2\cos\phi\,.\,\alpha\,(\beta\varepsilon^\phi + \beta\varepsilon^{-\phi}) - \cos\phi\,.\,\alpha\,(\varepsilon^\phi\beta + \varepsilon^{-\phi}\beta)\}.$$

Nu is

$$\mathrm{V}\,(\beta\varepsilon^\phi + \beta\varepsilon^{-\phi}) = \mathrm{V}\,(\varepsilon^\phi\beta + \varepsilon^{-\phi}\beta) = 2\cos\phi\,.\,\beta\,,$$

dus

$$2 \text{ inhoud } P_aP_bP_c + 2 \text{ inhoud } P'_aP'_bP'_c = 2\,\mathrm{TV}\,\alpha\beta + 6\cos^2\phi\,.\,\mathrm{TV}\,\alpha\beta -$$
$$- 4\cos^2\phi\,.\,\mathrm{TV}\,\alpha\beta - 2\cos^2\phi\,.\,\mathrm{TV}\,\alpha\beta = 2\,\mathrm{TV}\,\alpha\beta,$$

of

$$\text{Inh. } P_aP_bP_c + \text{Inh. } P'_aP'_bP'_c = 2 \text{ Inh. ABC.}$$

II. Verder is

$$CZ_a = \tfrac{1}{3}(\beta + \cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^{\phi}),$$
$$CZ_b = \tfrac{1}{3}(2\alpha - \cos\phi\,.\,\alpha\varepsilon^{\phi}),$$
$$CZ_c = \tfrac{1}{3}\{\alpha + 2\beta + \cos\phi\,.\,(\alpha - \beta)\,\varepsilon^{\phi}\}.$$
$$Z_aZ_b = \tfrac{1}{3}\{2\alpha - \beta - \cos\phi\,.\,\alpha\varepsilon^{\phi} - \cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^{\phi}\},$$
$$Z_aZ_c = \tfrac{1}{3}\{\alpha + \beta + \cos\phi\,.\,\alpha\varepsilon^{\phi} - 2\cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^{\phi}\}.$$

$$\mathrm{TV}\,.\,Z_aZ_b\,.\,Z_aZ_c = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{TV}\,\{2\alpha\beta + 2\cos\phi\,.\,\alpha^2\varepsilon^{\phi} - 4\cos\phi\,.\,\alpha\beta\varepsilon^{\phi} -$$
$$- \beta\alpha - \cos\phi\,.\,\beta\alpha\varepsilon^{\phi} + 2\cos\phi\,.\,\beta^2\varepsilon^{\phi} - \cos\phi\,.\,\alpha\varepsilon^{\phi}\alpha - \cos\phi\,.\,\alpha\varepsilon^{\phi}\beta +$$
$$+ 2\cos^2\phi\,.\,\alpha\beta - \cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^{\phi}\alpha - \cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^{\phi}\beta - \cos^2\phi\,.\,\beta\alpha\} =$$
$$= \tfrac{1}{3}\,\mathrm{TV}\,\{3\alpha\beta + 3\cos^2\phi\,.\,\alpha\beta + 2\cos\phi\,.\,\alpha^2\varepsilon^{\phi} + 2\cos\phi\,.\,\beta^2\varepsilon^{\phi} -$$
$$- \cos\phi\,.\,\alpha\varepsilon^{\phi}\alpha - \cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^{\phi}\beta - 4\cos\phi\,.\,\alpha\beta\varepsilon^{\phi} - \cos\phi\,.\,\beta\alpha\varepsilon^{\phi} -$$
$$- \cos\phi\,.\,\alpha\varepsilon^{\phi}\beta - \cos\phi\,.\,\beta\varepsilon^{\phi}\alpha\}.$$

Voor den dubbelen inhoud van $\Delta\, Z'_aZ'_bZ'_c$ moet hierbij worden gevoegd wat men verkrijgt door ε^{ϕ} met $\varepsilon^{-\phi}$ te verwisselen. Dan worden de eerste twee termen $6\alpha\beta + 6\cos^2\phi\,.\,\alpha\beta$, de volgende vier geven met de overeenkomstige nul en de daarop volgende geven

$$- 8\cos^2\phi\,.\,\alpha\beta + 2\cos^2\phi\,.\,\alpha\beta - 2\cos^2\phi\,.\,\alpha\beta + 2\cos^2\phi\,.\,\alpha\beta.$$

Wij hebben derhalve

$$2 \times \text{Inh. } Z_aZ_bZ_c + 2 \times \text{Inh. } Z'_aZ'_bZ_c = \tfrac{8}{3}\,\mathrm{TV}\,\alpha\beta, \quad \text{of}$$
$$\text{Inh. } Z_aZ_bZ_c + \text{Inh. } Z'_aZ'_bZ'_c = \tfrac{2}{3} \text{ Inh. ABC.}$$

Vraagstuk XCVII.

K 4. Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de grondlijn en de afstanden van het hoogtepunt tot den top en tot het middelpunt van den omgeschreven cirkel. (DR. C. STOLP.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, P. BAKKER, J. A. BARRAU, MEJ. C. H. DE HAAS, E. D. J. DE JONGH JR., MEVR. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF, J. A. KERKHOVEN, F. F. LEUPEN, J. F. VAN OSS, DR. A. J. A. PRANGE *en* DR. C. STOLP.

Oplossing *van* Mej. C. H. de Haas.

Zet op een lijn de gegeven basis BC uit, deel haar rechthoekig middendoor en bepaal op de deellijn een punt M, waarvan de afstand tot BC gelijk is aan de helft van den gegeven afstand van den top en het hoogtepunt. Construeer nu den cirkel, die M tot middelpunt en MB tot straal heeft. Bepaal het spiegelbeeld M′ van M met betrekking tot BC en beschrijf uit M′ als middelpunt een cirkel, die tot straal heeft den afstand van het hoogtepunt tot het middelpunt M. Is H′ een der snijpunten van de beide cirkels, dan zal de loodlijn uit H′ op BC den omgeschreven cirkel in den top A snijden.

Vraagstuk XCVIII.

L¹ 12 c. De middelpunten der kegelsneden, die vier gegeven rechten aanraken, liggen in een bepaalde rechte *m*. Van één kegelsnede dezer schaar liggen de brandpunten op *m*; men vraagt deze punten te construeeren. (H. de Vries.)

Opgelost *door* Dr. P. H. Schoute, H. de Vries *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* Dr. J. de Vries.

De rechte *m* kan terstond bepaald worden, omdat zij de middens bevat van de diagonalen der vierzijde, welke door de gegeven rechten wordt gevormd.

De brandpunten F en F′ van elke kegelsnede, die de rechten *a*, *b* en *c* aanraakt, zijn isogonaal verwant met betrekking tot den driehoek (*abc*).

De kegelsnede, waarin *m* door de isogonale transformatie wordt omgezet, snijdt deze rechte in de gevraagde brandpunten.

De constructie komt dus neer op het bepalen van de dubbelpunten van twee op *m* gelegen projectieve puntenreeksen.

Vraagstuk IC.

L¹ 16 b. Gegeven is een hyperbool, waarvan de asymptoten hoeken van 60° maken met de brandpuntenas. Door een brandpunt en den niet daarbij behoorenden top brengt men een cirkel. Men

vraagt aan te toonen, dat de overige snijpunten van hyperbool en cirkel de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek zijn. [1])

(H. DE VRIES.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, P. BAKKER, J. A. BARRAU, DR. A. J. A. PRANGE, DR. P. H. SCHOUTE, DR. A. VAN THIJN, H. DE VRIES *en* DR. J. DE VRIES.

Oplossing *van* DR. A. J. A. PRANGE.

De hyperbool heeft tot vergelijking $3x^2 - y^2 = a^2$. Van een cirkel, die door het brandpunt $(2a, 0)$ en den top $(-a, 0)$ gaat, heeft het middelpunt de coördinaten $(\frac{1}{2}a, h)$. Hij wordt dus voorgesteld door de vergelijking $x^2+y^2-ax-2hy-2a^2=0$.

Voor de snijpunten van hyperbool en cirkel vindt men de vergelijkingen

$$y(16y^3 - 48hy^2 - 27a^2y + 36h^2y + 36a^2h) = 0,$$

$$16x^4 - 8ax^3 - (39a^2 + 12h^2)x^2 + 10a^3x + (25a^4 + 12a^2y^2) = 0.$$

Een der wortels der laatste vergelijking is natuurlijk gelijk aan $-a$; de som der overige bedraagt derhalve $\frac{3}{2}a$. De som der overeenkomstige ordinaten is blijkbaar $3h$. Het zwaartepunt der drie punten, welke cirkel en hyperbool buiten den top gemeen hebben, wordt dus aangewezen door $x = \frac{1}{2}a$, $y = h$, en daar het samenvalt met het middelpunt van den cirkel, vormen de drie snijpunten een gelijkzijdigen driehoek.

Oplossing *van* DR. J. DE VRIES.

1. De drietallen snijpunten der hyperbool met de bedoelde cirkels vormen een kubische involutie, die uit den top der hyperbool geprojecteerd wordt door een kubische straleninvolutie. Als twee groepen dezer involutie uit stralen bestaan, die hoeken van 60° met elkaar maken, is dit met elk drietal het geval en zijn de bedoelde driehoeken allen gelijkzijdig.

Want op een willekeurigen cirkel door den top bepaalt onze straleninvolutie weer een kubische punteninvolutie. Vormen nu twee drietallen de hoekpunten van twee gelijkzijdige drie-

[1]) Dit vraagstuk is ontleend aan STEINER's Vorlesungen über synthetische Geometrie, 1e deel, waar de stelling op bl. 51 (3e uitgaaf) terloops genoemd, doch niet bewezen is.

hoeken, dan valt de kegelsnede, welke de verbindingslijnen der tot dezelfde groep behoorende punten omhult, samen met den gemeenschappelijken ingeschreven cirkel der beide gelijkzijdige driehoeken. Maar dan levert elke groep een gelijkzijdige driehoek, en bestaat elk drietal der straleninvolutie uit drie rechten, welke hoeken van 60° met elkaar maken.

2. De bedoelde hyperbool heeft tot vergelijking $3x^2 - y^2 = 3a^2$. Neemt men den top $(-a, 0)$ tot pool en OX tot poolas, dan wordt zij voorgesteld door $r(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 6a\cos\theta$. De cirkel door top en brandpunt, die zijn middelpunt op OX heeft, wordt aangewezen door $r = 3a\cos\theta$. De drie snijpunten zijn dan bepaald door $\cos\theta\,(4\cos^2\theta - 3) = 0$, dus door $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 90°$, $\theta_2 = 150°$. De ontaarde cirkel van den bundel snijdt de hyperbool in de raakpunten der asymptoten en in den tweeden top; hier is dus $\theta_1 = 0°$, $\theta_2 = 60°$, $\theta_3 = 120°$. De kubische straleninvolutie heeft derhalve twee drietallen van de bovengenoemde soort, en de stelling is bewezen.

Oplossing *van* Dr. P. H. Schoute.

1. Van elken driehoek gevormd door drie raaklijnen van een parabool p^2 gaat de omgeschreven cirkel door het brandpunt F, terwijl het hoogtepunt op de richtlijn r ligt. Bepaalt men zich tot gelijkzijdige driehoeken, dan valt het hoogtepunt steeds met het middelpunt van den omgeschreven cirkel samen; men heeft dus de volgende stelling:

„De cirkels omschreven aan de gelijkzijdige driehoeken waar„van de zijden aan een gegeven parabool p^2 raken, vormen „een *bundel*, waarvan het brandpunt F en het spiegelbeeld „F′ van F met betrekking tot de richtlijn r de beide basis„punten zijn."

2. Is op een gegeven kegelsnee een kubische involutie van puntendrietallen gegeven, dan omhullen de drietallen van verbindingslijnen weer een kegelsnee; want door een willekeurig punt P_1 der gegeven kegelsnee gaan twee raaklijnen dier omhullende, n.l. de lijnen, die P_1 verbinden met de beide punten P_2, P_3 waarmede het een groep vormt. Deze stelling, die bij dualistische omkeering in zich zelve overgaat, leert, dat omgekeerd de hoekpunten van de gelijkzijdige driehoeken omschreven aan de parabool p^2 op een kegelsnee k^2 liggen;

want deze driehoeken doen werkelijk om p^2 een involutie van raaklijnen-drietallen ontstaan.

3. Trekken we aan p^2 de raaklijnen l_1, l_2, die hoeken van 60° maken met de as, dan zien we, dat deze behooren tot een omgeschreven gelijkzijdigen driehoek, waarvan de derde zijde de richting heeft van de as van p^2 en daarom in het oneindige valt. Dus geven l_1 en l_2 de asymptotenrichtingen van de gezochte meetkundige plaats k^2 aan. Verder is de as van p^2, om redenen van symmetrie, tevens een as van k^2 en wel de bestaanbare, omdat het snijpunt A van l_1 en l_2 tot k^2 behoort. De andere top der hyperbool k^2 is F'; want de raaklijnen uit F' aan p^2 vormen met de as hoeken van 30° en dus met de topraaklijn van p^2 een omschreven gelijkzijdigen driehoek. Verder blijkt gemakkelijk dat F'A het dubbel is van AF, waaruit dan ten slotte volgt, dat F een brandpunt is van k^2.

Daar men nu omgekeerd van k^2 uit kan gaan, is hiermee het gestelde bewezen.

Vraagstuk C.

0 4 g α. Bepaal het regelvlak, dat zoodanig op het regelvlak

$$2x^2z = (x + a)y^2$$

kan ontwikkeld worden, dat de overeenkomstige beschrijvende lijnen in denzelfden zin evenwijdig loopen. (DR. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* DR. J. DE VRIES *en* DR. P. ZEEMAN GZN.

Oplossing *van* DR. P. ZEEMAN.

Voert men twee veranderlijke parameters u en v in, dan kunnen de coördinaten van een punt op het gegeven oppervlak in functie dezer parameters worden uitgedrukt door

$$x = u\ ,\quad y = uv\ ,\quad z = (u + a)\frac{v^2}{2}\cdot$$

Geeft men achtereenvolgens aan v constante waarden, dan verkrijgt men de verschillende beschrijvende rechten van dit oppervlak.

Het element eener kromme op dit oppervlak wordt nu bepaald door de uitdrukking

$$ds^2 = \left(1 + v^2 + \frac{v^4}{4}\right)du^2 + [2vu + v^3(u+a)]\,du\,dv + [u^2 + v^2(u+a)^2]dv^2.$$

Daar de beschrijvende rechten van het gezochte regelvlak in dezelfden zin evenwijdig moeten loopen met die van het gegevene, kan men een rechte van dat regelvlak voorstellen door

$$x = u + b_1\ ,\quad y = uv + b_2\ ,\quad z = \frac{uv^2}{2} + b_3,$$

waarin b_1, b_2 en b_3 nog onbekende functies van v zijn, die bepaald moeten worden met behulp van de voorwaarde, dat dit regelvlak ontwikkelbaar moet zijn op het gegevene.

Voor het element eener kromme op dit regelvlak heeft men

$$ds^2 = \left(1 + v^2 + \frac{v^4}{4}\right)du^2 + [2b'_1 + 2v(u + b'_2) + v^2(uv + b'_3)]du\,dv +$$
$$+ [b'^2_1 + (u + b'_2)^2 + (uv + b'_3)^2]\,dv^2,$$

waarin de accenten afgeleiden ten opzichte van v aanwijzen.

Zullen nu de beide oppervlakken op elkaar ontwikkeld kunnen worden, dan moeten de beide lijnelementen identiek zijn. Daartoe moet voldaan worden aan de voorwaarden

$$2b'_1 + 2vb'_2 + v^2b'_3 = av^3,$$
$$b'_2 + vb'_3 = av^2,$$
$$b'^2_2 + b'^2_2 + b'^2_3 = a^2v^2.$$

Uit de eerste twee leidt men af

$$b'_1 = -\frac{v}{2}b'_2\ ,\quad b'_3 = av - \frac{b'_2}{v}.$$

Dit substitueerende in de laatste vindt men ter bepaling van b'_2

$$(v^4 + 4v^2 + 4)\,b'^2_2 - 8ab'_2v^2 = 0.$$

Hieraan wordt voldaan door $b'_2 = 0$, hetgeen tot het oorspronkelijke regelvlak terugvoert, en verder door

$$b'_2 = \frac{8av^2}{(v^2 + 2)^2},$$

waaruit dan volgt

$$b'_1 = -\frac{8av^3}{(v^2+2)^2}, \quad b'_3 = av - \frac{8av}{(v^2+2)^2}.$$

Door eenvoudige integraties vindt men hieruit

$$b_1 = -2a \lg (v^2+2) - \frac{4a}{v^2+2},$$

$$b_2 = -\frac{4av}{v^2+2} + \frac{4a}{\sqrt{2}} \operatorname{bg tg} \frac{v}{\sqrt{2}},$$

$$b_3 = \frac{av^2}{2} + \frac{4a}{v^2+2}.$$

Het nieuwe regelvlak, waarop het oorspronkelijke kan worden ontwikkeld, wordt dus voorgesteld door

$$x = u - 2a \lg (v^2+2) - \frac{4a}{v^2+2},$$

$$y = uv - \frac{4av}{v^2+2} + \frac{4a}{\sqrt{2}} \operatorname{bg tg} \frac{v}{\sqrt{2}},$$

$$z = \frac{v^2}{2}(u+a) + \frac{4a}{v^2+2}.$$

Vraagstuk CI.

O 6 h. Van elk punt P van een gegeven oppervlak F bepaalt men de projectie P_1 op een gegeven vlak V. Men laat V om een van zijn normalen 90° wentelen, waardoor P_1 in P_2 komt. Door P_2 trekt men een rechte evenwijdig met de normaal van F in P. Toon aan, dat de verkregen rechten alleen dan weer de normalen van een oppervlak zijn, als F een minimaal-oppervlak is.

(DR. P. ZEEMAN GZ.)

Opgelost *door* DR. P. H. SCHOUTE, DR. J. DE VRIES *en* DR. P. ZEEMAN GZ.

Oplossing *van* DR. P. H. SCHOUTE.

We duiden het gegeven oppervlak door de vergelijking $z=f(x, y)$ aan en stellen als naar gewoonte door p, q de eerste, door r, s, t de tweede differentiaalquotienten van z naar x en y voor.

De normaal

$$\left.\begin{aligned} X - x + p(Z - z) &= 0, \\ Y - y + q(Z - z) &= 0, \end{aligned}\right\}$$

in het punt (x, y, z) van het gegeven oppervlak gaat door de bedoelde transformatie over in de lijn

$$\left.\begin{aligned} X &= -y - pZ, \\ Y &= x - qZ, \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

die we ook door de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} X &= -y + p\lambda \\ Y &= x + q\lambda \\ Z &= -\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

kunnen voorstellen. Nu rijst de vraag of het mogelijk is λ als functie van x en y zoo te bepalen, dat de overeenkomstige meetkundige plaats van het punt 2) in dit punt steeds de lijn 1) tot normaal heeft. Daartoe is noodig, dat de lijn 1) loodrecht staat op de beide lijnen, waarvan de richtingscoëfficienten achtereenvolgens evenredig zijn met

$$\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Dit geschiedt onder de voorwaarden

$$\left.\begin{aligned} q + (p^2 + q^2 + 1)\frac{\partial \lambda}{\partial x} + (pr + qs)\lambda &= 0, \\ -p + (p^2 + q^2 + 1)\frac{\partial \lambda}{\partial y} + (ps + qt)\lambda &= 0. \end{aligned}\right\}.$$

Hieruit volgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= -\frac{(pr + qs)\lambda + q}{p^2 + q^2 + 1} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= -\frac{(ps + qt)\lambda - p}{p^2 + q^2 + 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 3).$$

Door uit beide vergelijkingen $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y}$ af te leiden en de uitkomsten aan elkaar gelijk te stellen vindt men na eenige herleiding

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0, \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

wat juist de voorwaarde uitdrukt, dat het gegeven oppervlak een minimaal-oppervlak is.

Is omgekeerd aan 4) voldaan, dan laat λ zich zoo bepalen, dat aan de beide vergelijkingen 3) voldaan wordt.

Vraagstuk CII.

M³ 5 h. Welke betrekking moet tusschen de grootheden a en b bestaan, opdat elk osculatievlak der kubische ruimtekromme

$$x = a\frac{\cos\varphi}{\cos 3\varphi},\quad y = a\frac{\sin\varphi}{\cos 3\varphi},\quad z = b\,\mathrm{tg}\,3\varphi$$

door de overige osculatievlakken gesneden worde volgens de raaklijnen eener gelijkzijdige hyperbool? (DR. P. ZEEMAN GZ.)

Oplossing *van* DR. P. ZEEMAN GZ.

Het osculatievlak in een punt ϕ_1 der gegeven kromme heeft tot vergelijking

$$3bx\sin\phi_1 - 3by\cos\phi_1 + az\cos 3\phi_1 - ab\sin 3\phi_1 = 0 \;.\;.\; 1).$$

De kegelsnede, omhuld door de snijlijnen van dit vlak met de overige osculatievlakken, is ook de meetkundige plaats der snijpunten van dit vlak met de raaklijnen der gegeven kubische ruimtekromme. De richtingen der asymptoten van die kegelsnede worden dus bepaald door die raaklijnen der kromme, welke evenwijdig zijn aan 1). Daar nu de raaklijn der kromme in een punt ϕ voorgesteld worden door de vergelijkingen

$$3bx\sin\phi - 3by\cos\phi + az\cos 3\phi - ab\sin 3\phi = 0,$$
$$bx\cos\phi + by\sin\phi - az\sin 3\phi - ab\cos 3\phi = 0,$$

zal deze raaklijn evenwijdig zijn aan 1), wanneer voldaan is aan

$$\begin{vmatrix} 3b\sin\phi & -3b\cos\phi & a\cos 3\phi \\ b\cos\phi & b\sin\phi & -a\sin 3\phi \\ 3b\sin\phi_1 & -3b\cos\phi_1 & a\cos 3\phi_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Deze vergelijking die, na eenige herleiding, kan worden geschreven in den vorm

$$(\mathrm{tg}\,\phi - \mathrm{tg}\,\phi_1)^2(\mathrm{tg}^2\phi + 2\,\mathrm{tg}\,\phi\,\mathrm{tg}\,\phi_1 - 1) = 0,$$

levert vier waarden van ϕ, in overeenstemming met de bekende eigenschap, dat er bij elke kubische ruimtekromme vier raaklijnen zijn, die een gegeven rechte, in dit geval de rechte in het oneindige van het vlak 1), snijden. Van deze vier raaklijnen vallen hier twee samen met de raaklijn der kromme in het osculatievlak 1); deze komen overeen met de waarde $\phi = \phi_1$. De beide andere, die de richtingen aangeven van de asymptoten der in 1) gelegen kegelsnede, worden bepaald door

$$\operatorname{tg}^2 \phi + 2 \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \phi_1 - 1 = 0,$$

waaruit

$$\operatorname{tg} \phi = - \operatorname{tg} \phi_1 \pm \sec \phi_1 \text{ of } \phi = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2} \text{ en } \phi = \frac{3\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}.$$

De raaklijn in het punt ϕ der kromme maakt met de coördinaatassen hoeken α, β, γ, waarvan de cosinussen zijn

$$\cos \alpha = a \frac{\sin 4\phi + 2 \sin 2\phi}{\sqrt{a^2(5-4\cos 6\phi)+9b^2}}, \quad \cos \beta = a \frac{2 \cos 2\phi - \cos 4\phi}{\sqrt{a^2(5-4\cos 6\phi)+9b^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{3b}{\sqrt{a^2(5-4\cos 6\phi)+9b^2}}.$$

Substitueert men hierin voor ϕ achtereenvolgens de beide bovengevonden waarden $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}$ en $\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}$, dan vindt men de richtingscosinussen der asymptoten van de in het vlak 1) gelegen kegelsnede. De hoek ψ der asymptoten is dan bepaald door

$$\cos \psi = \frac{3\,(3b^2 - a^2)}{\sqrt{(5a^2 + 9b^2)^2 - 16a^4 \sin^2 3\phi_1}}.$$

Hieruit volgt: Zijn a en b willekeurig, dan is ψ nimmer gelijk aan nul; geen der kegelsneden, in de osculatievlakken der gegeven kubische ruimtekromme gelegen, is dan eene gelijkzijdige hyperbool.

Is echter $3b^2 = a^2$, dan zal $\cos \psi$, onafhankelijk van ϕ_1, gelijk aan nul zijn; in dat geval zijn alle beschouwde kegelsneden gelijkzijdige hyperbolen.

de zinspreuk: „*Een onser-*
gericht in 1779, tracht de
oor

gstukken ter oplossing voor
plossingen,

elijk maandelijks te Amster-
er tot Maart.
publications mathématiques"
pte opgaven te verschaffen
ige tijdschriften opgenomen
in twee stukken, ieder van

hief voor Wiskunde" gere-
en, Dr. D. J. Korteweg te
roningen bevat wiskundige
nt een deel, bestaande uit

ingezonden oplossingen van
ubliceerd in de „*Wiskundige*
Vries te Utrecht. Elk deel
n in ruim 400 bladzijden; het
n van ongeveer vier vel druks.
p een twaalftal prijsvragen
tijd tien prijsvragen hebben
van verdienste.
op aanvraag bij Dr. C. P.
s-bibliotheek te Amsterdam,
e hoogte van den tijd, daar
rnaamste wiskundige genoot-

en der Vereeniging bedraagt

en verlangen lid te worden,
Ondervoorzitter, den Heer
dam.

m. 900.33

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN

DOOR DE

LEDEN VAN HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP

TER SPREUKE VOERENDE

„Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"

ACHTSTE DEEL.
4de Stuk

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1901.

Ter bevordering eener geregelde toezending van de drukwerken van het Gen schap, worden de leden beleefd verzocht bij verhuizing hun nieuw adres op te ge aan Dr. D. COELINGH, Ondervoorzitter van het Genootschap, Amsterdam, Breestraat 143.

De volgende vroeger verschenen uitgaven zijn tegen de daarbij aangegeven prijzen te ontbieden bij den Ondervoorzitter, den Heer D. COELINGH, Amsterdam, Marnixstraat 409, bij wien men ook klachten inbrengen kan over eventueele onregelmatigheden in de toezending der uitgaven van het Genootschap.

Feestgave van het Wiskundig Genootschap ter gelegenheid van zijn honderdjarig bestaan, bevattende de herdruk van twee zeldzame, merkwaardige Hollandsche werken [(Corte onderrichtinghe dienende tot het maecken vande reductien van de tacxcustingen tot gereede penningen, om dien-volgende te eysschen en ontfangen den veertichsten penning op alle vercochte of vervreemde onroerende goeden, volgende tplacaet der Heeren Staten van den XXII Decembris 1598) en (Waerdye van Lyf-renten naer proportie van Los-renten, geteekend JOHAN DE WITT, 1671)]
in den handel *f* 6,00 . . . . . voor de leden *f* 3,00.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1885
in den handel *f* 3,00 . . . . voor de leden *f* 1,50.

Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundige wetenschappen (naar den franschen tekst bewerkt), Amsterdam, 1892
in den handel *f* 2,00 . . . . voor de leden *f* 1,00.

Voordrachten over den Grondslag, per vel
in den handel *f* 0,30 . . . . voor de leden *f* 0,15.

Nieuw Archief voor Wiskunde, eerste reeks, twintig deelen, tweede reeks, deel 1 en 2, per deel
in den handel *f* 4,00 . . . . voor de leden *f* 2,00.
(De volgende deelen per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,50 . . . . voor de leden *f* 0,75).

Wiskundige Opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, deel 1—7 per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,00 . . . . voor de leden *f* 0,50.

Revue semestrielle des publications mathématiques, deel 1—8, van elk twee stukken à *f* 4,00 en bij overcompleete stukken, per stuk *f* 2,00.

Tables des matières des volumes I—V . . . . *f* 2,00.

Vraagstuk CIII.

M³ 5 h. Bepaal de meetkundige plaats der middelpunten van de oneindig kleine bollen, die een dubbele aanraking hebben met de kromme

$$x = \frac{a}{1+t^2}, \quad y = \frac{at}{1+t^2}, \quad z = bt.$$

(DR. P. ZEEMAN GZ.)

Opgelost *door* DR. P. H. SCHOUTE, DR. J. DE VRIES *en* DR. P. ZEEMAN GZ.

Oplossing *van* DR. J. DE VRIES.

1. De gegeven kromme snijdt den oneindig ver gelegen onbestaanbaren cirkel in de punten $t = \pm i$; zij heeft dus met elken puntbol vier in het eindige gelegen punten gemeen, waarvan de parameters worden gevonden door in

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = 0$$

te substitueeren

$$X = \frac{a}{1+t^2}, \quad Y = \frac{at}{1+t^2}, \quad Z = bt.$$

Na eenige herleiding vindt men

$$b^2t^4 - 2bzt^3 + (x^2 + y^2 + z^2 + b^2)t^2 - 2(ay + bz)t + \\ + (x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + a^2) = 0.$$

Zal de puntbol de kubische ellips in twee punten raken, dan moet deze vergelijking herleidbaar zijn tot den vorm

$$b^2(t-u)^2(t-v)^2 = 0,$$

dus tot

$$b^2t^4 - 2b^2(u+v)t^3 + b^2(u^2 + 4uv + v^2)t^2 - 2b^2(u+v)uvt + b^2u^2v^2 = 0.$$

Derhalve moeten u en v voldoen aan

$$b(u+v) = z, \qquad b^2(u^2 + 4uv + v^2) = x^2 + y^2 + z^2 + b^2,$$

$$b^2(u+v)uv = ay + bz, \qquad b^2u^2v^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + a^2.$$

Door eliminatie van u en v vindt men hieruit

$$a^2y^2 = z^2(a^2 - 2ax + z^2),$$
$$2aby = z(x^2 + y^2 - b^2).$$

2. De substitutie $y = mz$ geeft

$$z^2(a^2 - 2ax + z^2 - a^2m^2) = 0,$$
$$z(x^2 + m^2z^2 - b^2 - 2abm) = 0.$$

Bijgevolg is de X-as dubbelrechte op het eerste oppervlak en enkelvoudige rechte op het tweede.

Verder snijdt elk vlak $z =$ const. het eerste oppervlak tweemaal in het oneindige, het tweede eenmaal, zoodat de oneindig ver gelegen rechte van XOY tweemaal tot de doorsnijding behoort.

De punten der meetkundige plaats, welke in het vlak $y = mz$ liggen, worden bepaald door

$$z^2 - 2ax + a^2 - a^2m^2 = 0,$$
$$x^2 + m^2z^2 - b^2 - 2abm = 0,$$

of ook door

$$(x + am^2)^2 = (am + b)^2,$$
$$z^2 = a^2m^2 + 2ax - a^2.$$

Hieruit blijkt, dat de meetkundige plaats uit twee ruimtekrommen van den vierden graad bestaat, die achtereenvolgens bepaald zijn door

$$\begin{cases} x = -am^2 + am + b, \\ y = mz, \\ z^2 = -a^2(m-1)^2 + 2ab, \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x = -am^2 - am - b, \\ y = mz, \\ z^2 = -a^2(m+1)^2 - 2ab. \end{cases}$$

Elke dezer focaalkrommen heeft twee punten met de X-as gemeen; deze is dus een gemeenschappelijke koorde.

Voor $m = -\dfrac{b}{a}$ levert elke kromme

$$x = -\frac{b^2}{a}, \quad z^2 = -a^2 - b^2, \quad y = -\frac{b}{a}z.$$

De beide krommen hebben dus de hierdoor aangewezen twee punten gemeen.

Als a en b reëele constanten zijn is een der beide focaalkrommen blijkbaar geheel imaginair.

Vraagstuk CIV.

O 7 a. Door elk punt van het oppervlak

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v),\ z = h(u, v)$$

waarop de parameterkrommen elkaar rechthoekig snijden, brengt men een rechte, die constante hoeken maakt met de raaklijnen der in dat punt samenkomende parameterkrommen en met de normaal van het oppervlak. Toon aan, dat de verkregen rechten slechts dan de normalen van een oppervlak zijn, als de geodetische kromtestralen der parameterkrommen een constante verhouding hebben. (Dr. P. Zeeman Gz.)

Eene oplossing van dit vraagstuk is te vinden in de verhandeling van Dr. P. Zeeman Gz. „Eigenschappen van eenige bijzondere stralenstelsels", Nieuw Archief voor Wiskunde, tweede reeks, deel IV, bl. 299—301.

Vraagstuk CV.

K 1 c. In een vlak zijn twee driehoeken ABC en A'B'C' gegeven. Men vraagt naar de meetkundige plaats van het punt P, waarvoor de rechten A, B, C, welke met A'P, B'P, C'P gelijke hoeken maken, door eenzelfde punt gaan.

(Dr. H. van Aubel.)

Oplossing *van* Mevr. A. G. Kerkhoven—Wythoff.

Het punt A' nemen wij aan als oorsprong van vectoren; den eenheidsvector in de richting A'B' noemen wij β en dien in de richting A'C', γ. Dan heeft men voor B' en C' achtereenvolgens $c'\beta$ en $b'\gamma$.

Wij stellen nu

$$\begin{aligned} &A \ldots\ldots x_a\beta + y_a\gamma\,, \\ &B \ldots\ldots x_b\beta + y_b\gamma\,, \\ &C \ldots\ldots x_c\beta + y_c\gamma\,, \\ &P \ldots\ldots p\beta + q\gamma. \end{aligned}$$

Als ε den eenheidsvector loodrecht op het vlak voorstelt en ϕ den hoek, dien de lijnen door A, B, C met A'P, B'P, C'P insluiten, dan zijn de vergelijkingen van die lijnen

$$\begin{aligned} \rho &= x_a\beta + y_a\gamma + x\,(p\beta + q\gamma)\,\varepsilon^{\phi}\,, \\ \rho &= x_b\beta + y_b\gamma + y\,\{(p - c')\,\beta + q\gamma\}\,\varepsilon^{\phi}\,, \\ \rho &= x_c\beta + y_c\gamma + z\,\{p\beta + (q - b')\,\gamma\}\,\varepsilon^{\phi}\,. \end{aligned}$$

Stellen wij

$$\beta\varepsilon^{\phi} = r\beta + s\gamma, \quad \text{dan is}$$
$$\gamma\varepsilon^{\phi} = -\,s\beta + r\gamma.$$

Hier zijn r en s functies van ϕ, die gemakkelijk kunnen berekend worden, maar die wij niet noodig hebben.

De voorwaarde, dat de drie lijnen door één punt gaan, is de afhankelijkheid van de vergelijkingen in x, y en z, die men verkrijgt als men van de drie waarden voor ρ de β- en de γ-ontbondenen aan elkander gelijk stelt.

$$x_a + xpr - xqs = x_b + y\,(p - c')\,r - yqs = x_c + zpr - z\,(q - b')\,s,$$
$$y_a + xps - xqr = y_b + y\,(p - c')\,s + yqr = y_c + zps + z\,(q - b')\,r.$$

Uit deze vergelijkingen leiden we de volgende af

$$x_ar + y_as + xp(r^2+s^2) = x_br + y_bs + y\,(p - c')(r^2+s^2) = x_cr + y_cs + zp(r^2+s^2),$$
$$y_ar - x_as + xq(r^2+s^2) = y_br - x_bs + yq(r^2+s^2) = y_cr - x_cs + z(q - b')(r^2+s^2).$$

De voorwaarde van afhankelijkheid is nu blijkbaar

$$\begin{vmatrix} p & p - c' & 0 & (x_b - x_a)\,r + (y_b - y_a)\,s \\ p & 0 & p & (x_c - x_a)\,r + (y_c - y_a)\,s \\ q & q & 0 & (y_b - y_a)\,r + (x_a - x_b)\,s \\ q & 0 & q - b' & (y_c - y_a)\,r + (x_a - x_c)\,s \end{vmatrix} = 0.$$

Dit is de vergelijking, op de scheefhoekige assen A'B' en A'C', van een kegelsnede, die om Δ A'B'C' is beschreven; want voor $p = 0$, $q = 0$ worden alle termen in de eerste kolom nul; voor $p = c'$, $q = 0$ en $p = 0$, $q = b'$ geschiedt hetzelfde met de tweede en derde kolom. De termen in de vierde kolom zijn gelijk aan de projecties van AB en AC op dezelfde assen, nadat ze een hoek ϕ hebben gewenteld; wij stellen ze door P_1, P_2, P_3 en P_4 voor.

Na ontwikkeling vindt men de vergelijking

$$P_3 b' p^2 + (P_4 c' - b' P_1) pq - c' P_2 q^2 - P_3 b' c' p + P_2 b' c' q = 0.$$

Hier kan $(P_4 c' - b' P_1)^2 + 4 P_2 P_3 b' c'$ zoowel positief als negatief zijn; dit hangt af van den stand en den vorm van driehoek ABC en van den hoek ϕ. De kegelsnede kan dus een hyperbool, parabool of ellips zijn.

Vraagstuk CVI.

K 1 d. Op de zijden van een driehoek $A_1A_2A_3$ heeft men buitenwaarts de gelijkzijdige driehoeken $A_2B_1A_3$, $A_3B_2A_1$, $A_1B_3A_2$ en binnenwaarts de gelijkzijdige driehoeken $A_2b_1A_3$, $A_3b_2A_1$, $A_1b_3A_2$ beschreven, waarvan I_1, I_2, I_3, i_1, i_2, i_3 de middelpunten zijn. Is O het oppervlak van $A_1A_2A_3$, dan heeft men

$$A_1B_1B_2 + A_1b_1b_2 = 2O; \quad A_2B_2B_3 = 3A_2I_2I_3; \quad I_1I_2i_3 + i_1i_2I_3 = \tfrac{1}{3}O;$$

$$I_1B_2B_3 + i_1b_2b_3 = 3O; \quad I_1i_2B_3 + i_1I_2b_3 = \tfrac{1}{3}O; \quad I_1I_2B_3 + i_1i_2b_3 = \tfrac{5}{3}O.$$

(Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF *en* Dr. A. J. A. PRANGE.

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

Wij noemen de zijden van den driehoek a_1, a_2, a_3, de oppervlakken der daarop beschreven driehoeken O_1, O_2, O_3, de stralen van hun ombeschreven cirkels r_1, r_2, r_3.

Nu is:

$$1)\quad A_1B_1B_2 = A_1A_3B_2 + A_1B_1A_3 + A_3B_1B_2 =$$
$$= O_2 + \tfrac{1}{2} a_1 a_2 \{\sin(A_3 + 60^\circ) + \sin(240^\circ - A_3)\} =$$
$$= O_2 + \tfrac{1}{2} a_1 a_2 . 2 \sin 150^\circ \cos(90^\circ - A_3) = O_2 + O.$$

$$A_1b_1b_2 = A_1b_1A_3 + A_3b_1b_2 - A_1b_2A_3 =$$
$$= -O_2 + \tfrac{1}{2}a_1a_2\{\sin(A_3 - 60^\circ) + \sin(120^\circ - A_3)\} =$$
$$= -O_2 + \tfrac{1}{2}a_1a_2 \,.\, 2\sin 30^\circ \cos(90^\circ - A_3) = -O_2 + O.$$

Dus $\quad A_1B_1B_2 + A_1b_1b_2 = 2O.$

2) $$A_2B_2B_3 = A_2B_2A_1 + A_1B_3A_2 - A_1B_3B_2 =$$
$$= O_3 + \tfrac{1}{2}a_2a_3\{\sin(A_1 + 60^\circ) - \sin(A_1 + 120^\circ)\} =$$
$$= O_3 + \tfrac{1}{2}a_2a_3 \sin A_1 = O_3 + O.$$
$$A_2I_2I_3 = A_2A_1I_3 + A_1A_2I_2 - A_1I_3I_2 =$$
$$= \tfrac{1}{3}O_3 + \tfrac{1}{2}r_2a_3\sin(A_1 + 30^\circ) - \tfrac{1}{2}r_2r_3\sin(A_1 + 60^\circ) =$$
$$= \tfrac{1}{3}O_3 + \tfrac{1}{6}a_2a_3\{\sin(A_1+30^\circ)\sqrt{3} - \sin(A_1+60^\circ)\} = \tfrac{1}{3}O_3 + \tfrac{1}{3}O.$$

Dus $\quad A_2B_2B_3 = 3A_2I_2I_3.$

3) $$I_1I_2i_3 = -A_3I_2I_1 + A_3I_2i_3 + A_3i_3I_1 =$$
$$= -A_3I_2I_2 + A_1A_3I_2 + A_1i_3A_3 - A_1i_3I_2 + A_2I_1A_3 +$$
$$+ A_2A_3i_3 - A_2I_1i_3 =$$
$$= -\tfrac{1}{2}r_1r_2\sin(A_3 + 60^\circ) + \tfrac{1}{3}O_2 + \tfrac{1}{2}a_2r_3\sin(A_1 - 30^\circ) -$$
$$- \tfrac{1}{2}r_2r_3\sin A_1 + \tfrac{1}{3}O_1 + \tfrac{1}{2}a_1r_3\sin(A_2 - 30^\circ) - \tfrac{1}{2}r_1r_3\sin A_2 =$$
$$= \tfrac{1}{3}O_1 + \tfrac{1}{3}O_2 - \tfrac{1}{6}a_1a_2\{\tfrac{1}{2}\sin A_3 + \tfrac{1}{2}\cos A_3\sqrt{3}\} +$$
$$+ \tfrac{1}{6}a_2a_3\{\tfrac{1}{2}\sin A_1 - \tfrac{1}{2}\cos A_1\sqrt{3}\} +$$
$$+ \tfrac{1}{6}a_1a_3\{\tfrac{1}{2}\sin A_2 - \tfrac{1}{2}\cos A_2\sqrt{3}\} =$$
$$= \tfrac{1}{6}O + \tfrac{1}{3}O_1 + \tfrac{1}{3}O_2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\{a_1a_2\cos A_3 + a_2a_3\cos A_1 + a_1a_3\cos A_2\}.$$

$$i_1i_2I_3 = A_3I_3i_1 + A_3i_2I_3 - A_3i_2i_1 =$$
$$= A_2A_3I_3 - A_2A_3i_1 - A_2i_1I_3 + A_3A_1I_3 - A_3A_1i_2 - A_1I_3i_2 - A_3i_2i_1 =$$
$$= \tfrac{1}{2}a_1r_3\sin(A_2 + 30^\circ) - \tfrac{1}{3}O_1 - \tfrac{1}{2}r_1r_3\sin A_2 + \tfrac{1}{2}a_2r_3\sin(A_1 + 30^\circ)$$
$$- \tfrac{1}{3}O_2 - \tfrac{1}{2}r_2r_3\sin A_1 - \tfrac{1}{2}r_1r_2\sin(A_3 - 60^\circ) =$$
$$= -\tfrac{1}{3}O_1 - \tfrac{1}{3}O_2 - \tfrac{1}{6}a_1a_2\{\tfrac{1}{2}\sin A_3 - \tfrac{1}{2}\cos A_3\sqrt{3}\} +$$
$$+ \tfrac{1}{6}a_2a_3\{\tfrac{1}{2}\sin A_1 + \tfrac{1}{2}\cos A_1\sqrt{3}\} +$$
$$+ \tfrac{1}{6}a_1a_3\{\tfrac{1}{2}\sin A_2 + \tfrac{1}{2}\cos A_2\sqrt{3}\} +$$
$$= \tfrac{1}{6}O - \tfrac{1}{3}O_1 - \tfrac{1}{3}O_2 +$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{12}\{a_1a_2\cos A_3 + a_2a_3\cos A_1 + a_3a_1\cos A_2\}.$$

Dus $\quad I_1I_2i_3 + i_1i_2I_3 = \tfrac{1}{3}O.$

4) $$\begin{aligned}
I_1B_2B_3 &= A_1A_3B_2 + A_3A_2I_1 + A_1A_2A_3 + A_2A_1B_3 - \\
&\quad - A_1B_3B_2 - A_3B_2I_1 - A_2I_1B_3 = \\
&= O_2 + \tfrac{1}{3}O_1 + O + O_3 - \tfrac{1}{2}a_2a_3 \sin(A_1 + 120^\circ) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}a_2r_1 \sin(A_3 + 90^\circ) - \tfrac{1}{2}a_3r_1 \sin(A_2 + 90^\circ) = \\
&= O + \tfrac{1}{3}O_1 + O_2 + O_3 - \tfrac{1}{6}a_1a_2 \cos A_3 \sqrt{3} + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}a_2a_3\{\tfrac{1}{2}\sin A_1 - \tfrac{1}{2}\cos A_1\sqrt{3}\} - \tfrac{1}{6}a_1a_3 \cos A_2\sqrt{3} = \\
&= \tfrac{3}{2}O + \tfrac{1}{3}O_1 + O_2 + O_3 - \frac{a_1\sqrt{3}}{6}(a_2\cos A_3 + a_3\cos A_2) - \\
&\quad - \tfrac{1}{4}a_2a_3\cos A_1\sqrt{3} = \\
&= \tfrac{3}{2}O - \tfrac{1}{3}O_1 + O_2 + O_3 - \tfrac{1}{4}a_2a_3\cos A_1\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_1b_2b_3 &= A_1b_2b_3 - A_1b_2i_1 - A_1i_1b_3 = \\
&= A_1b_2b_3 - A_3A_1b_2 + A_3A_1i_1 + A_3i_1b_2 - \\
&\quad - A_1A_2b_3 + A_1A_2i_1 + A_2b_3i_1 = \\
&= - O_2 - O_3 + \tfrac{1}{2}a_2a_3\sin(120^\circ - A_1) + \tfrac{1}{2}a_2r_1\sin(A_3 - 30^\circ) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}a_2r_1\sin(90^\circ - A_3) + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}a_3r_1\sin(A_2 - 30^\circ) + \tfrac{1}{2}a_3r_1\sin(90^\circ - A_2) = \\
&= - O_2 - O_3 + \tfrac{1}{2}a_2a_3\{\tfrac{1}{2}\sin A_1 + \tfrac{1}{2}\cos A_1\sqrt{3}\} + \\
&\quad + \tfrac{1}{6}a_1a_2\{\tfrac{3}{2}\sin A_3 + \tfrac{1}{2}\cos A_3\sqrt{3}\} + \\
&\quad + \tfrac{1}{6}a_1a_3\{\tfrac{3}{2}\sin A_2 + \tfrac{1}{2}\cos A_2\sqrt{3}\} = \\
&= - O_2 - O_3 + \tfrac{3}{2}O + \tfrac{1}{12}a_1\sqrt{3}\,.\,(a_2\cos A_3 + a_3\cos A_2) + \\
&\quad + \tfrac{1}{4}a_2a_3\cos A_1\sqrt{3} \\
&= \tfrac{3}{2}O + \tfrac{1}{3}O_1 - O_2 - O_3 + \tfrac{1}{4}a_2a_3\cos A_1\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Dus $\quad I_1B_2B_3 + i_1b_2b_3 = 3O.$

5) $$\begin{aligned}
I_1i_2B_3 &= A_2I_1i_2 + A_2i_2B_3 - A_2I_1B_3 = \\
&= A_3A_2I_1 + A_2A_3i_2 - A_3i_2I_1 + A_2A_1B_3 + A_1A_2i_2 - \\
&\quad - A_1B_3i_2 - A_2I_1B_3 = \\
&= \tfrac{1}{3}O_1 + \tfrac{1}{2}a_1r_2\sin(A_3 - 30^\circ) - \tfrac{1}{2}r_1r_2\sin A_3 + O_3 + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}a_3r_2\sin(A_1 - 30^\circ) + \\
&\quad - \tfrac{1}{2}a_3r_2\sin(A_1 + 30^\circ) - \tfrac{1}{2}a_3r_1\sin(A_2 + 90^\circ) = \\
&= \tfrac{1}{3}O_1 + O_3 + \tfrac{1}{6}a_1a_2\{\tfrac{1}{2}\sin A_3 - \tfrac{1}{2}\cos A_3\sqrt{3}\} - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}a_2a_3\sin A_1 - \tfrac{1}{6}a_1a_3\cos A_2\sqrt{3} = \\
&= - \tfrac{5}{6}O + \tfrac{1}{3}O_1 + O_3 - \tfrac{1}{12}a_1\sqrt{3}\{a_2\cos A_3 + a_3\cos A_2\} -
\end{aligned}$$

$$- \tfrac{1}{12}\, a_1 a_3 \cos A_2 \sqrt{3} =$$
$$= - \tfrac{5}{6}\, O + O_3 - \tfrac{1}{12}\, a_1 a_3 \cos A_2 \sqrt{3}.$$

$$I_2 i_1 b_3 = A_2 I_2 i_1 + A_2 b_3 I_2 - A_2 b_3 i_1 =$$
$$= A_2 A_3 i_1 + A_3 I_2 i_1 - A_2 A_3 I_2 + A_1 A_2 b_3 + A_1 b_3 I_2 -$$
$$- A_1 A_2 I_2 - A_2 b_3 i_1 =$$
$$= \tfrac{1}{3}\, O_1 + \tfrac{1}{2}\, r_1 r_2 \sin A_3 - \tfrac{1}{2}\, a_1 r_2 \sin (A_3 + 30^\circ) +$$
$$+ O_3 + \tfrac{1}{2}\, a_3 r_2 \sin (A_1 - 30^\circ) - \tfrac{1}{2}\, a_3 r_2 \sin (A_1 + 30^\circ) -$$
$$- \tfrac{1}{2}\, a_3 r_1 \sin (90^\circ - A_2) =$$
$$= \tfrac{1}{3}\, O_1 + O_3 - \tfrac{1}{6}\, a_1 a_2 \{ \tfrac{1}{2} \sin A_3 + \tfrac{1}{2} \cos A_3 \sqrt{3} \} -$$
$$- \tfrac{1}{2}\, a_2 a_3 \sin A_1 - \tfrac{1}{6}\, a_1 a_3 \cos A_2 \sqrt{3} =$$
$$= - \tfrac{1}{6}\, O + O_3 - \tfrac{1}{12}\, a_1 a_3 \cos A_2 \sqrt{3}.$$

Derhalve wordt, als men

$I_2 i_1 b_3 = - i_1 I_2 b_3$ stelt,

$$I_1 i_2 B_3 + i_1 I_2 b_3 = \tfrac{1}{3}\, O.$$

6) $$I_1 I_2 B_3 = A_1 I_1 I_2 + A_1 B_3 I_1 - A_1 B_3 I_2 =$$
$$= A_1 A_3 I_2 + A_3 A_1 I_1 - A_3 I_2 I_1 + A_2 A_1 B_3 + A_1 A_2 I_1 -$$
$$- A_2 I_1 B_3 - A_1 B_3 I_2 =$$
$$= \tfrac{1}{3}\, O_2 + \tfrac{1}{2}\, a_2 r_1 \sin (A_3 + 30^\circ) - \tfrac{1}{2}\, r_1 r_2 \sin (A_3 + 60^\circ) +$$
$$+ O_3 + \tfrac{1}{2}\, a_3 r_1 \sin (A_2 + 30^\circ) +$$
$$- \tfrac{1}{2}\, a_3 r_1 \sin (A_2 + 90^\circ) - \tfrac{1}{2}\, a_3 r_2 \sin (A_1 + 90^\circ) =$$
$$= \tfrac{1}{3}\, O_2 + \tfrac{1}{6}\, a_1 a_2 \sin A_3 + O_3 +$$
$$\tfrac{1}{6}\, a_1 a_3 \{ \tfrac{3}{2} \sin A_2 - \tfrac{1}{2} \cos A_2 \sqrt{3} \} - \tfrac{1}{6}\, a_2 a_3 \cos A_1 \sqrt{3} =$$
$$= \tfrac{5}{6}\, O + \tfrac{1}{3}\, O_2 + O_3 - \tfrac{1}{6}\, a_1 a_3 \,.\, \tfrac{1}{2} \cos A_2 \sqrt{3} - \tfrac{1}{6}\, a_2 a_3 \cos A_1 \sqrt{3} =$$
$$= \tfrac{5}{6}\, O + \tfrac{1}{3}\, O_2 + \tfrac{2}{3}\, O_3 - \tfrac{1}{12}\, a_2 a_3 \cos A_1 \sqrt{3}.$$

$$i_2 i_1 b_3 = A_1 i_1 b_3 - A_1 i_2 b_3 - A_1 i_1 i_2 =$$
$$= A_1 A_2 b_3 - A_2 b_3 i_1 - A_1 A_2 i_1 - A_1 i_2 b_3 - A_3 A_1 i_1 +$$
$$+ A_3 A_1 i_2 + A_3 i_2 i_1 =$$
$$= O_3 - \tfrac{1}{2}\, a_3 r_1 \sin (90^\circ - A_2) - \tfrac{1}{2}\, a_3 r_1 \sin (A_2 - 30^\circ) -$$
$$- \tfrac{1}{2}\, a_3 r_2 \sin (90^\circ - A_1) - \tfrac{1}{2}\, a_2 r_1 \sin (A_3 - 30^\circ) +$$
$$+ \tfrac{1}{3}\, O_2 + \tfrac{1}{2}\, r_1 r_2 \sin (A_3 - 60^\circ) =$$
$$= O_3 + \tfrac{1}{3}\, O_2 - \tfrac{1}{6}\, a_1 a_2 \sin A_3 -$$
$$- \tfrac{1}{6}\, a_1 a_3 \{ \tfrac{1}{2} \cos A_2 \sqrt{3} + \tfrac{3}{2} \sin A_2 \} - \tfrac{1}{6}\, a_2 a_3 \cos A_1 \sqrt{3} =$$

$$= -\tfrac{5}{6}\,O + \tfrac{1}{3}\,O_2 + \tfrac{2}{3}\,O_3 - \tfrac{1}{12}\,a_2 a_3 \cos A_1 \sqrt{3}.$$

Dus heeft men:

$$I_1 I_2 B_3 + i_1 i_2 b_3 = \tfrac{5}{3}\,O.$$

Vraagstuk CVII.

D 2 b γ. Aan te toonen, dat men heeft

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \sum_{3}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ldots\ldots(4n-3)}{4 \;.\; 6 \;.\; 8 \;\ldots\ldots\; 2n}$$

$$+ \sum_{3}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ldots\ldots(4n-5)}{4 \;.\; 6 \;.\; 8 \;\ldots\ldots\; (2n-2)} = 1.$$

(Dr. V. A. JULIUS.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, Dr. V. A. JULIUS, W. MANTEL *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Wij stellen de gegeven reeks in deze orde op:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2^5} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{2^6} \cdot \frac{7}{4} + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{7.9}{4.6} + \frac{1}{2^8} \cdot \frac{9.11}{4.6} + \frac{1}{2^9} \cdot \frac{9.11.13}{4.6.8} + \ldots\ldots$$

Verminderen we 1 met den eersten term, trekken van de rest den tweeden term af, van de nieuwe rest den derden term enz., dan vinden we achtereenvolgens

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{16} = \frac{8}{2^5} \cdot \frac{5}{4},\ \frac{7}{2^5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{2^6} \cdot \frac{7}{4},\ \frac{9}{2^6} \cdot \frac{7}{4} = \frac{12}{2^7} \cdot \frac{7.9}{4.6},$$

$$\frac{11}{2^7} \cdot \frac{7.9}{4.6} = \frac{14}{2^8} \cdot \frac{9.11}{4.6} \text{ enz.}$$

Deze uitkomsten wettigen het vermoeden, dat we, nadat $(2p+1)$ termen zijn afgetrokken, de rest in den vorm

$$\frac{(2p+3)(2p+5)\ldots\ldots(4p+1)}{2^{2p+2} \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots\ldots 2p}$$

kunnen schrijven.

Om dit door de sluitrede van n op $n+1$ te bewijzen, verminderen we de uitdrukking

$$\frac{(2p+1)(2p+3)\ldots\ldots(4p-3)}{2^{2p}\,.\,4\,.\,6\quad\ldots\ldots(2p-2)}$$

met den $2p^{\text{den}}$ en den $(2p+1)^{\text{en}}$ term der reeks, dus met

$$\frac{(2p+1)(2p+3)\ldots(4p-3)}{2^{2p+1}\,.\,4\,.\,6\ldots\ldots\;2p}+\frac{(2p+3)(2p+5)\ldots\ldots(4p-1)}{2^{2p+2}\,.\,4\,.\,6\ldots\ldots\;2p}.$$

Er komt dan

$$\frac{(2p+3)\ldots\ldots(4p-3)}{2^{2p+2}\,.\,4\ldots\ldots\;2p}(16p^2-1),$$

wat met de bovenstaande uitdrukking overeenkomt.

Schrijft men voor deze rest nog

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2p+3)(2p+5)\ldots(4p+1)}{2^{2p+1}\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,.\,2p\,.\,(2p+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdot\frac{4p+1}{4p+2},$$

dan blijkt dat ze tot nul nadert als men p onbeperkt laat aangroeien. Dit blijkt o. a. uit het onderzoek van den logarithmus der gevonden uitdrukking.

En hiermee is het gevraagde aangetoond.

Vraagstuk CVIII.

H 5 g. Te integreeren

$$(a+2bx+cx^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}-6(a+2bx+cx^2)(b+cx)\frac{dy}{dx}+12(b+cx)^2y=0.$$

(Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* Dr. W. Kapteyn, Mevr. A. G. Kerkhoven-Wythoff, W. Mantel, Dr. A. J. A. Prange, Dr. A. Toxopeus *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* Dr. J. de Vries.

Stelt men ter bekorting $a+2bx+cx^2=u$, dan is $2(b+cx)=u'$ en de gegeven vergelijking gaat over in

$$u^2y'' - 3uu'y' + 3u'^2y = 0.$$

Door de substitutie $y = uv$ vindt men hieruit

$$uv'' - u'v' + u''v = 0.$$

De regelmaat in deze vergelijking wettigt het vermoeden dat men haar zal kunnen bevredigen door een quadratische functie van x.

De substitutie $v = \alpha + 2\beta x + \gamma x^2$ levert de voorwaarde $a\gamma - 2b\beta + c\alpha = 0$.

Men heeft dus

$$y = (a + 2bx + cx^2)(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2),$$

waar $$a\gamma - 2b\beta + c\alpha = 0 \text{ is.}$$

Hiervoor kan geschreven worden

$$y = (a + 2bx + cx^2)[C_1(b + cx)^2 + C_2(b + cx) + C_1(b^2 - ac)].$$

Oplossing *van* W. MANTEL.

Door toepassing van de methode van FUCHS vindt men dat de kritieke punten zijn het oneindige en de wortels van $a + 2bx + cx^2 = 0$; de integralen zijn regelmatig.

De vergelijking is dus herleidbaar tot een hypergeometrische.

Zijn x_1 en x_2 de wortels der genoemde vierkantsvergelijking, dan kan men door de substitutie $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ de kritieke punten in 0, 1 en ∞ brengen.

De bijzondere vorm der vergelijking wijst hier op een andere substitutie, namelijk

$$a + 2bx + cx^2 = t,$$

waardoor men vindt

$$2(b^2 - ac + ct)t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - [6(b^2 - ac)t + 5ct^2]\frac{dy}{dt} +$$
$$+ 6(b^2 - ac + ct)y = 0.$$

Om de kritieke punten op hun plaatsen te brengen, stellen wij

$$b^2 - ac + ct = (b^2 - ac)(1 - u),$$

en verkrijgen

$$2u^2(1-u)\frac{d^2y}{du^2}+(5u-6)u\frac{dy}{du}+6(1-u)y=0.$$

Om den factor u^2 van den eersten term tot u terug te brengen, stellen wij thans $y=u^\lambda z$; het blijkt dan, dat λ gelijk aan 1 of 3 moet wezen. Kiest men $\lambda=1$, dus $y=uz$, dan verkrijgt men de hypergeometrische vergelijking

$$2u(1-u)\frac{d^2z}{du^2}+(u-2)\frac{dz}{du}-z=0.$$

Daar de algemeene vorm $z=F(\alpha,\beta,\gamma;u)$ hier wegens $\gamma=-1$ niet kan gebruikt worden, zoeken we de reeksontwikkeling rechtstreeks.

De substitutie $z=\sum_0^\infty g_k u^k$ verandert het linker lid der differentiaalvergelijking in

$$-(g_0+2g_1)+\sum_2^\infty(k-1)[2(k+1)g_{k+1}-(2k-1)g_k]u^k.$$

De coëfficienten g_k moeten dus voldoen aan de voorwaarden

$$g_1=-\tfrac{1}{2}g_0 \text{ en } g_{k+1}=\frac{2k-1}{2k+2}g_k;$$

hieruit volgt

$$g_k=-\frac{(2k-3)(2k-5)\ldots\ldots 3}{2k(2k-2)\quad\ldots\ldots 6}g_2.$$

Dus wordt

$$z=\tfrac{1}{2}g_0(2-u)-g_2\sum_2^\infty\frac{(2k-3)(2k-5)\ldots\ldots 3}{2k(2k-2)\quad\ldots\ldots 6}u^k.$$

Nu is

$$(1-u)^{\frac{1}{2}}=1-\tfrac{1}{2}u-\sum_2^\infty\frac{(2k-3)(2k-5)\ldots\ldots 3.1.1}{2k(2k-2)\quad\ldots\ldots 6.4.2}u^k.$$

Derhalve wordt

$$z=C_1(2-u)+C_2(1-u)^{\frac{1}{2}}.$$

Na uitvoering der substituties vindt men hieruit

$$y=(a+2bx+cx^2)[A(b+cx)^2+B(b+cx)+A(b^2-ac)].$$

Vraagstuk CIX.

H 3 c. Te integreeren

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y-3}{2y(1-y)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{2x-2a+b}{(x-a)(x-a+b)}\frac{dy}{dx} +$$

$$\frac{b^2y(1+y)}{2(x-a)^2(x-a+b)^2(1-y)} = 0.$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF *en* W. MANTEL.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Een eerste vereenvoudiging wordt te weeg gebracht door de substitutie

$$\frac{x-a}{x-a+b} = t;$$

de vergelijking gaat daardoor over in

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{y-3}{2y(1-y)}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{y(1+y)}{2t^2(1-y)} = 0.$$

Na vermenigvuldiging met $2t^2$ kan de vergelijking in dezen vorm worden geschreven:

$$\frac{d}{dy}\left(t\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{y-3}{y(1-y)}\left(t\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{y(1+y)}{1-y} = 0.$$

Ten opzichte van $\left(t\frac{dy}{dt}\right)^2$ als functie van y is deze vergelijking lineair. Op de bekende wijze vindt men de algemeene integraal

$$\left(t\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{y}{1-y}\right)^2(1+2gy+y^2).$$

En door quadraturen leidt men hieruit af

$$hy = t[y+g+\sqrt{(1+2gy+y^2)}]\,[1+gy+\sqrt{(1+2gy+y^2)}].$$

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

Stelt men $y = f(z)$, dan is

$$\frac{dy}{dx} = f'(z)\frac{dz}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + f'(z)\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Na substitutie blijkt, dat de term met $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$ zal vervallen, als men $f(z)$ laat voldoen aan

$$f''(z) = \frac{3 - f(z)}{2f(z)\,[1 - f(z)]}\,f'(z).$$

Hiervan is

$$f(z) = (z + \sqrt{z^2 - 1})^2$$

een oplossing.

Door toepassing van deze substitutie vindt men de vergelijking

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2x - 2a + b}{(x-a)(x-a+b)}\frac{dz}{dx} - \frac{b^2z}{4(x-a)^2(x-a+b)^2} = 0.$$

Nu kan een vergelijking van den vorm

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \mathrm{P}\frac{dz}{dx} + \mathrm{Q}z = 0$$

door verandering van onafhankelijk veranderlijke tot een vergelijking met constante coëfficienten herleid worden zoodra voldaan is aan de voorwaarde

$$\left(2\mathrm{PQ} + \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)\mathrm{Q}^{-\frac{3}{2}} = \text{const.}$$

(zie Versl. en Med. der K. Akad. van Wet. 2e reeks, deel XVIII).

Dit is hier het geval. Substitueert men, in verband hiermee

$$t = lg\,\frac{x-a}{x-a+b},$$

dan wordt de vergelijking omgezet in

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \tfrac{1}{4}z = 0,$$

welke tot integraal heeft

$$z = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Hieruit vindt men gemakkelijk de oplossing der gegeven vergelijking.

Vraagstuk CX.

C 1 d. Welke differentiaalvergelijking bestaat tusschen de wortels der vierkantsvergelijking:

$$rm^2 - 2sm + t = 0,$$

wanneer men heeft

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}?$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN *en* Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF.

Oplossing *van* Mevr. A. G. KERKHOVEN—WIJTHOFF.

Noemt men de bedoelde wortels m_1 en m_2, dan is

$$(m_1 + m_2)\, r = 2s \text{ en } m_1 m_2 r = t,$$

dus

$$r = \frac{2}{m_1 + m_2}\, s \text{ en } t = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, s.$$

Differentieert men deze twee betrekkingen achtereenvolgens naar y en naar x, dan wordt

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 2s \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{m_1 + m_2}\right) + \frac{2}{m_1 + m_2}\frac{\partial s}{\partial y},$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = 2s \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) + \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{\partial s}{\partial x}.$$

Uit deze twee betrekkingen vindt men twee vergelijkingen van den vorm

$$\frac{\partial s}{\partial x} = As \quad \text{en} \quad \frac{\partial s}{\partial y} = Bs.$$

Nu is

$$\frac{\partial}{\partial y}(As) = \frac{\partial}{\partial x}(Bs)$$

of

$$A\frac{\partial s}{\partial y} + s\frac{\partial A}{\partial y} = B\frac{\partial s}{\partial x} + s\frac{\partial B}{\partial x}.$$

Maar hieruit volgt

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Men vindt op deze wijze

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1-m_2}\right)^2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right) + 2\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{m_1+m_2}\right)\right\} =$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1-m_2}\right)^2\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{m_1+m_2}\right) + \frac{2}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)\right\}.$$

Na eenige herleiding wordt hieruit verkregen

$$2\left(m_1\frac{\partial m_2}{\partial x} - \frac{\partial m_2}{\partial y}\right)^2 - 2\left(m_2\frac{\partial m_1}{\partial x} - \frac{\partial m_1}{\partial y}\right)^2 + (m_1-m_2)\left(m_1\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 m_2$$

$$+ (m_1-m_2)\left(m_2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 m_1 = 0.$$

Vraagstuk CXI.

H 8 a. Te integreeren

$$(a^2x^2 - b^2y^2 + a^2 - b^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2a(axy + by^2 + b)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

(Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* Dr. W. Kapteyn, Mevr. A. G. Kerkhoven—Wythoff *en* W. Mantel.

Oplossing *van* Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF.

De integratie is terug te brengen tot de oplossing van het stelsel

$$\frac{dx}{a^2x^2 - b^2y^2 + a^2 - b^2} = \frac{dy}{2a^2xy + 2aby^2 + 2ab} = \frac{dz}{0}.$$

Uit de eerste dezer vergelijkingen volgt

$$\frac{adx + bdy}{a\,[(ax + by)^2 + a^2 + b^2]} = \frac{dy}{2ay\,(ax + by + 2ab)}.$$

Door de substitutie

$$ax + by = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}\,u,\quad y = b\,(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}\,v$$

vindt men hieruit

$$\frac{2du}{u^2 + 1} = \frac{dv}{uv + 1},$$

of

$$\frac{dv}{du} - \frac{2u}{u^2 + 1}\,v = \frac{2}{u^2 + 1}.$$

De oplossing van deze lineaire vergelijking is

$$v = u + (u^2 + 1)\,(\text{bg tg}\,u - C),$$

of

$$\frac{u - v}{u^2 + 1} + \text{bg tg}\,u = C.$$

De integraal der gegeven vergelijking wordt nu

$$\frac{a\,(bx - ay)}{(ax + by)^2 + a^2 + b^2} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\text{bg tg}\,\frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \phi\,(z).$$

Vraagstuk CXII.

H 9 a. Bepaal de beide eerste integralen der partieele differentiaalvergelijking

$$rt - s^2 + (1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t\} + (1+p^2+q^2)^2 = 0.$$

(Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* Dr. W. Kapteyn *en* Dr. A. Toxopeus.

Oplossing *van* Dr. A. Toxopeus.

De kenmerkende vergelijking

$$\lambda^2 + 2pq\,(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}\lambda + p^2q^2\,(1 + p^2 + q^2) = 0$$

heeft hier twee gelijke wortels.

Men heeft nu de hulpvergelijkingen

$$dp + (1 + p^2)\,(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}\,dx + pq\,(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}\,dy = 0,$$

$$dq + pq\,(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}\,dx + (1 + q^2)\,(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}\,dy = 0$$

Hieruit leidt men af

$$dx + \frac{(1 + q^2)\,dp - pq\,dq}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} = 0$$

en

$$dy + \frac{(1 + p^2)dq - pq\,dp}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} = 0,$$

waaruit door integratie volgt:

$$x + p\,(1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} = a$$

en

$$y + q\,(1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} = b.$$

Daar men bovendien heeft

$$dz = pdx + qdy = (1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}}\,(pdp + qdq),$$

dus

$$z - (1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} = c,$$

zijn de gevraagde integralen

$$x + \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} = \phi\left(z - \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)$$

en

$$y + \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = \psi\left(z - \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right).$$

OPMERKING. De oplossing der gegeven differentiaalvergelijking vindt men in Boole's Treatise, Suppl. Volume p. 160.

Vraagstuk CXIII.

C 1 g. Door de transformatie $\xi = f(x, y, z)$, $\eta = \varphi(x, y, z)$, $\zeta = \psi(x, y, z)$ gaat een oppervlak $z = F(x, y)$ over in een oppervlak $\zeta = \Phi(\xi, \eta)$. Bepaal de vergelijking van het raakvlak van het punt (ξ, η, ζ), in functie van x, y, z. (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF *en* Dr. P. ZEEMAN GZ.

Oplossing.

Het raakvlak in een punt (ξ, η, ζ) van het oppervlak $\zeta = \Phi(\xi, \eta)$ wordt voorgesteld door

$$\bar{\zeta} - \zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial\xi}(\bar{\xi} - \xi) + \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}(\bar{\eta} - \eta).$$

Nu heeft men blijkbaar

$$\psi'_x + p\psi'_z = (f'_x + pf'_z)\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + (\phi'_x + p\phi'_z)\frac{\partial\zeta}{\partial\eta},$$

$$\psi'_y + q\psi'_z = (f'_y + qf'_z)\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + (\phi'_y + q\phi'_z)\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}.$$

Door eliminatie van $\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$ en $\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$ vindt men uit deze drie vergelijkingen

$$\begin{vmatrix} \bar{\xi} - \xi & \bar{\eta} - \eta & \bar{\zeta} - \zeta \\ f'_x + pf'_z & \phi'_x + p\phi'_z & \psi'_x + p\psi'_z \\ f'_y + qf'_z & \phi'_y + q\phi'_z & \psi'_y + q\psi'_z \end{vmatrix} = 0,$$

waar p en q als functies van x en y uit $z = F(x, y)$ kunnen bepaald worden.

Vraagstuk CXIV.

J 2 c. Twee personen A en B spelen verscheidene malen achtereen, waarbij A een kans p, B een kans q heeft om ieder afzonderlijk spel te winnen; remise is uitgesloten, dus $p + q = 1$. De afspraak is dat A het totaalspel zal winnen, wanneer hij m spelen *achter elkander* gewonnen heeft, en B wanneer hij n evenzeer op elkaar volgende spellen wint. Welke is voor ieder speler de kans om het totaalspel te winnen 1° bij den aanvang van het eerste spel, 2° telkens gedurende den loop van het spel.

(Dr. D. J. KORTEWEG.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, W. MANTEL, E. A. J. H. MODDERMAN, F. SCHUH, Dr. A. VAN THIJN *en* Dr. W. A. WYTHOFF.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Noemen we de kans die A heeft om 't totaalspel te winnen, op 't oogenblik dat hij a spelen achtereen heeft gewonnen, K_a, en de kans van A op 't oogenblik dat B b spelen achtereen heeft gewonnen, K_{-b} (zoodat dus K_0 de kans is die A heeft om te winnen aan 't begin van 't spel). Op 't oogenblik dat A a spelen gewonnen heeft, zijn er 2 dingen mogelijk: 1ste A wint nog $m - a$ spelen achtereen, waarvoor de kans p^{m-a} is; in welk geval A 't totaalspel gewonnen heeft; 2de A wint geen $m - a$ spelen achtereen, waarvoor de kans $1 - p^{m-a}$ is; dan ontstaat na eenige door A gewonnen spelen de toestand dat B één spel gewonnen heeft, in welk geval de kans van A om 't totaalspel te winnen nog is K_{-1}. Men heeft dus:

$$K_a = p^{m-a} + (1 - p^{m-a}) K_{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Op 't oogenblik dat B b spelen gewonnen heeft, zijn er 2 dingen mogelijk: 1ste B wint nog $n - b$ spelen achtereen, waarvoor de kans q^{n-b} is; in welk geval A het totaalspel verloren heeft; 2de B wint geen $n - b$ spelen achtereen, waarvoor de kans $1 - q^{n-b}$ is; dan ontstaat na eenige spelen de toestand dat A één spel gewonnen heeft, in welk geval de kans van A om 't totaalspel te winnen is K_1. Men heeft dus:

$$K_{-b} = (1 - q^{n-b}) K_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

welke formules (1) en (2) men ook uit elkaar afleiden kan. Zij daartoe L_b de kans dat B 't spel wint als hij reeds b spelen achtereen heeft gewonnen, dan is analoog met (1) door letterverwisseling uit deze vergelijking af te leiden

$$L_b = q^{n-b} + (1 - q^{n-b}) L_{-1}.$$

Nu is echter $L_b = 1 - K_{-b}$, dus $L_{-1} = 1 - K_1$ waardoor bovenstaande vergelijking identiek wordt met vergelijking 2).

Stelt men nu in de vergelijkingen 1) en 2) a en b gelijk aan één, dan vindt men

$$K_1 = p^{m-1} + (1 - p^{m-1}) K_{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3),$$

$$K_{-1} = (1 - q^{n-1}) K_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Uit 3) en 4) K_1 en K_{-1} oplossende vindt men

$$K_1 = \frac{p^{m-1}}{p^{m-1} + q^{n-1} - p^{m-1}q^{n-1}} = \frac{p^{m-1}}{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

$$K_{-1} = \frac{p^{m-1}(1 - q^{n-1})}{p^{m-1} + q^{n-1} - p^{m-1}q^{n-1}} = \frac{p^{m-1}(1 - q^{n-1})}{D} \quad . \quad . \quad 6)$$

waarin $D \equiv p^{m-1} + q^{n-1} - p^{m-1}q^{n-1}$ is.

Door substitutie in 1) en 2) vindt men

$$K_a = \frac{p^{m-a}q^{n-1} + p^{m-1}(1 - q^{n-1})}{D} = \frac{p^{m-1}\{1 - q^{n-1}(1 - p^{1-a})\}}{D} \quad . \quad . \quad 7),$$

$$K_{-b} = \frac{p^{m-1}(1 - q^{n-b})}{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8),$$

welke vergelijkingen men op soortgelijke wijze als voor 1) en 2) is geschied, uit elkander afleiden kan. Opgemerkt zij dat K_{-a} niet uit K_a kan worden gevonden door het teeken van a om te keeren.

Zoowel uit 7) als uit 8) vindt men nu eindelijk door a of b nul te stellen

$$K_0 = \frac{p^{m-1}(1 - q^n)}{p^{m-1} + q^{n-1} - p^{m-1}q^{n-1}} = \frac{p^{m-1}(1 - q^n)}{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

OPMERKINGEN. Naar behooren is $K_m = 1$ en $K_{-n} = 0$, en zooals te verwachten was neemt K_a toe van K_0 tot 1 als a toeneemt van 0 tot m, terwijl K_{-b} afneemt van K_0 tot 0 als b afneemt van 0 tot n.

Onderstellen we dat p en q geen van beide zeer dicht bij één liggen, en m en n groot zijn, zoodat we dus p^{m-1} en q^{n-1} tegenover de eenheid kunnen verwaarloozen; zijn verder $m-a$ en $n-b$ nog groot, zoodat ook p^{m-a} en q^{n-b} tegenover de eenheid verwaarloosd kunnen worden, dan is bij benadering

$$K_a = K_{-b} = \frac{p^{m-1}}{p^{m-1} + q^{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{q^{n-1}}{p^{m-1}}}.$$

De kans dat A 't totaalspel wint, is dus nagenoeg onafhankelijk van 't aantal afzonderlijke spelen die A of B reeds achtereen heeft gewonnen, mits nog een groot aantal spelen achtereen moet gewonnen worden. Is $\frac{q^{n-1}}{p^{m-1}} = c$ dan heeft men

$$K_0 = \frac{1}{1 + c}.$$

Neemt men nu de getallen $n-1$ en $m-1$ beide r-maal grooter dan wordt

$$K_0 = \frac{1}{1 + c^r}.$$

Zij nu r groot, dan ligt K_0 dicht bij één als $c < 1$ is en dicht bij 0 als $c > 1$. Het vermenigvuldigen van de getallen $m-1$ en $n-1$ met een groot getal r heeft dus tengevolge dat de kans van de persoon die reeds de grootste kans heeft om het totaalspel te winnen nagenoeg één wordt.

Men heeft verder streng

$$K_0 = \frac{1}{1+c} + \frac{p^{m-1}q^{n-1}(p^m - q^n)}{D(p^{m-1} + q^{n-1})} = \frac{1}{1+c}\left\{1 + \frac{q^{n-1}(p^m - q^n)}{D}\right\} =$$

$$= \frac{1}{1+c}\left\{1 + \frac{q^{n-1}p^{m-1}(p - cq)}{D}\right\},$$

zoodat het van het teeken van $p - cq$ afhangt of $K_0 >$ of $<$ is dan $\frac{1}{1+c}$.

OPMERKING VAN W. MANTEL. Zou het spel billijk zijn opgezet, dan moest $K_0 = \frac{1}{2}$ wezen.

Voor $m = 2$, $n = 3$ vindt men $p = 0{,}3958$, $q = 0{,}6042$,
voor $m = 200$, $n = 300$ vindt men $p = 0{,}4302$, $q = 0{,}5698$.
Voor $m = 2$, $n = 3$, $p = q = \frac{1}{2}$ is $K_0 = 0{,}7$.
voor $m = 20$, $n = 30$, $p = q = \frac{1}{2}$ is $K_0 = 0{,}9992$.

Vraagstuk CXV.

J 2 c. Dezelfde vragen te beantwoorden als in Vraagstuk 114 in de onderstelling, dat remise kan voorkomen (dus $p + q < 1$) en remise voor beide spelers als een verloren spel wordt beschouwd.

(Dr. D. J. KORTEWEG.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, E. A. J. H. MODDERMAN, F. SCHUH, Dr. A. VAN THIJN *en* Dr. W. A. WYTHOFF.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Op 't oogenblik dat A a spelen gewonnen heeft, zijn er 2 dingen mogelijk: 1ste A wint nog $m - a$ spelen achtereen, waarvoor de kans p^{m-a} is, in welk geval A het totaalspel gewonnen heeft; 2de A wint geen $m - a$ spelen achtereen, waarvoor de kans $1 - p^{m-a}$ is; er zijn dan echter wederom 2 gevallen nader te onderscheiden, namelijk: 2α, het eerste spel dat A niet wint wordt door B gewonnen, waarvoor de kans is $\frac{q}{1-p}$, in welk geval A een kans K_{-1} heeft om 't totaalspel te winnen; 2β, het eerste spel dat A niet wint, is remise, waarvoor de kans is $\frac{r}{1-p}$, in welk geval A een kans K_0 heeft om 't totaalspel te winnen. Men heeft dus

$$K_a = p^{m-a} + (1 - p^{m-a}) \left(\frac{q}{1-p} K_{-1} + \frac{r}{1-p} K_0 \right) \ldots 1).$$

Op soortgelijke wijs leidt men de volgende vergelijking af

$$K_{-b} = (1 - q^{n-b})\left(\frac{p}{1-q} K_1 + \frac{r}{1-q} K_0\right) \quad \ldots\ldots 2).$$

Ook kan men de vergelijkingen 1) en 2) weer uit elkaar afleiden, zooals dit bij de vorige oplossing nader is aangetoond.

Door in 1) en 2) a en b gelijk aan 1 en 0 te stellen, vindt men

$$K_1 = p^{m-1} + \frac{1-p^{m-1}}{1-p} \{qK_{-1} + rK_0\} \quad \ldots\ldots\ldots 3),$$

$$K_{-1} = \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \{pK_1 + rK_0\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4),$$

$$K_0 = p^m + \frac{1-p^m}{1-p} \{qK_{-1} + rK_0\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5),$$

$$K_0 = \frac{1-q^n}{1-q} \{pK_1 + rK_0\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6).$$

Uit deze vergelijkingen vindt men

$$K_0 = \frac{p^m(1-q^n)(1-p)}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7),$$

$$K_1 = \frac{p^{m-1}(p+q^n r)(1-p)}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 8),$$

$$K_{-1} = \frac{p^m(1-q^{n-1})(1-p)}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 9),$$

waarin $D \equiv q^n(1-q) + p^m(1-p) - p^m q^n(1+r)$ is.

Door substituties in 1) en 2) vindt men dan

$$K_a = \frac{p^{m-a}q^n(1-q) + p^m(1-p) - p^m q^n(1+r)}{D} \quad \ldots 10),$$

$$K_{-b} = \frac{p^m(1-q^{n-b})(1-p)}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 11),$$

welke twee vergelijkingen ook weer uit elkaar zijn af te leiden.

OPMERKING. Wanneer we remise niet opvatten als een verlies maar als een spel dat niet meetelt, dan is dit vraagstuk op eenvoudige wijze tot het vorige terug te brengen. Immers we kunnen dan de remisespelen met 't eerstvolgende spel dat niet remise is als één spel opvatten, zoodat we bij ieder partieel spel doorspelen tot er geen remise is en dan 't partieelspel als afgeloopen beschouwen. Nu is dus bij het partieelspel remise onmogelijk, terwijl de kans dat A wint is $\frac{p}{p+q}$ en dat B wint $\frac{q}{p+q}$.

OPMERKING VAN E. A. J. H. MODDERMAN. In de oplossing van dit vraagstuk is die van het vorige vervat. Men heeft daartoe slechts $r = 0$ te nemen. Dan is $1 - p = q$, $1 - q = p$ en worden teller en noemer van alle voorkomende breuken door pq deelbaar. Na deze deeling gaan de uitkomsten dan in die van de vorige opgave over.

Vraagstuk CXVI.

L¹ 15 f. Van een gelijkzijdige hyperbool kent men het punt P en den top A. Men vraagt te bepalen

1) de meetkundige plaats van den tweeden top;

2) de meetkundige plaats van de brandpunten;

3) de meetkundige plaats van het snijpunt der raaklijnen in A en P. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, Dr. E. JENSEMA, Dr. A. TOXOPEUS *en* C. WAFELBAKKER.

Oplossing *van* C. WAFELBAKKER.

Neemt men den top A tot pool en de bestaanbare as tot poolas, dan is de vergelijking van een gelijkzijdige hyperbool

$$\rho \cos 2\theta + 2a \cos \theta = 0.$$

Maakt AP een hoek ϕ met de poolas en stelt men AP $= l$, dan is dus

$$2a = -\, l \cos 2\phi : \cos \phi.$$

Ten opzichte van AP als poolas heeft de tweede top A′ der hyperbool de coördinaten $2a$ en $\pi - \phi$. Dus is de poolvergelijking der meetkundige plaats van A′

$$\rho = l \cos 2\phi : \cos \phi.$$

De tweede top beschrijft dus een rechte strophoïde.

Tusschen de voerstralen dezer kromme en de voerstralen der gelijkzijdige hyperbool die AP tot bestaanbare as heeft, bestaat dus de betrekking

$$\rho \bar{\rho} = l^2.$$

De meetkundige plaats van A′ kan derhalve door inversie met het centrum A en en den straal l uit deze hyperbool worden afgeleid.

De brandpunten zullen blijkbaar eveneens rechte strophoïden beschrijven, welke uit de gevonden strophoïde ontstaan door vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$ en met $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})$.

Ten opzichte van het rechthoekige assenkruis, waarvan A de oorsprong en AP de X-as is, heeft de hyperbool tot vergelijking

$$x^2 - y^2 - 2xy \operatorname{tg} 2\phi - lx + ly \operatorname{tg} \phi = 0.$$

De raaklijnen in A en P worden dan voorgesteld door

$$x = y \operatorname{tg} \phi$$

en

$$x - l = y\,(2 \operatorname{tg} 2\phi - \operatorname{tg} \phi).$$

Door eliminatie van $\operatorname{tg} \phi$ vindt men hieruit voor de meetkundige plaats van het snijpunt dier raaklijnen

$$y^2 = x^2 \frac{l - 2x}{l + 2x}.$$

Deze is dus de rechte strophoïde, welke door vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ uit de meetkundige plaats van A′ wordt afgeleid; ze is derhalve tevens de meetkundige plaats van de middelpunten der hyperbolen.

Vraagstuk CXVII.

L[1] 15 f. Van een gelijkzijdige hyperbool kent men het punt P en het brandpunt F. Bepaal de meetkundige plaatsen van het tweede brandpunt en van de toppen. (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, Dr. E. JENSEMA *en* C. WAFELBAKKER.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Ten opzichte van F als oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel worden alle kegelsneden, waarvoor F een brandpunt is, voorgesteld door

$$x^2 + y^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2.$$

Gaat de X-as door P en stelt men $FP = a$, dan wijst deze vergelijking een gelijkzijdige hyperbool aan, welke door P gaat, als voldaan is aan

$$\gamma = -a(\alpha \pm 1)$$

en

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2.$$

De toppen A en A′, en het tweede brandpunt F′ liggen op de rechte

$$\beta x = \alpha y,$$

welke door F loodrecht is getrokken op de richtlijn

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Voor A en A′ vindt men nu gemakkelijk

$$x = -\alpha\gamma(1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) \quad , \quad y = -\beta\gamma(1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2}).$$

Daar men heeft $FA + FA' = FF'$, volgt hieruit dat F′ wordt aangewezen door

$$x = -2\alpha\gamma \quad , \quad y = -2\beta\gamma.$$

De punten A, A′ en F′ kunnen derhalve voorgesteld worden door

$$x = -f\alpha\gamma \quad , \quad y = -f\beta\gamma,$$

waar f een der waarden $1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ of 2 heeft.

Door eliminatie van α, β, γ vindt men voor de meetkundige plaats van een der genoemde punten

$$(x^2 + y^2)^2 - 4afx(x^2 + y^2) + 4a^2f^2x^2 = 2a^2f^2(x^2 + y^2),$$

of in poolcoördinaten

$$r = af(2\cos\theta \pm \sqrt{2}).$$

De gevraagde krommen zijn dus allen limaçons van PASCAL, waarvan het dubbelpunt in F ligt.

Vraagstuk CXVIII.

K 1 c. Op de zijden van driehoek ABC beschrijft men de rechtstreeks gelijkvormige driehoeken BCA′, CAB′, ABC′, die achtereenvolgens rechthoekig zijn in B, C, A. Vormen de punten P, Q, R der ellips van STEINER een barycentrisch drietal, dan gaan de rechten door A′, B′, C′ evenwijdig aan AP, BQ, CR of aan BQ, CR, AP of aan CR, AP, BQ door een zelfde punt, en is dit ook het geval met de rechten, welke door A′, B′, C′ loodrecht op de genoemde drietallen worden getrokken.

(Dr. A. J. A. PRANGE.)

Oplossing *van* Dr. A. J. A. PRANGE.

Gebruikt men barycentrische coördinaten en noemt de cotangenten van A, B, C en van de aan de zijden van driehoek ABC gelegen scherpe hoeken der rechthoekige driehoeken achtereenvolgens α, β, γ en τ, dan vindt men voor de coördinaten der punten A′, B′, C′ de waarden

$$-(\beta+\gamma),\ \gamma+\tau,\ \beta;\ \gamma,\ -(\gamma+\alpha),\ \alpha+\tau;\ \beta+\tau,\ \alpha,\ -(\alpha+\beta).$$

P, Q en R aanwijzende door x_1, y_1, z_1; y_1, z_1, x_1 en z_1, x_1, y_1, heeft men als vergelijkingen der rechten AP, BQ en CR

$$yz_1 - zy_1 = 0,\ zy_1 - xx_1 = 0,\ yz_1 - xx_1 = 0.$$

De rechten door A′, B′, C′ loodrecht op AP, BQ, CR getrokken, hebben nu tot vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} x[\tau\{(\alpha+\beta)y_1+\alpha z_1\}+y_1+z_1]+y(y_1+z_1)+z\{\tau(\beta y_1-\gamma z_1)+y_1+z_1\}=0 \\ x\{\tau(\gamma x_1-\alpha y_1)+x_1+y_1\}+y[\tau\{\beta+\gamma)x_1+\beta y_1\}+x_1+y_1]+z(x_1+y_1)=0 \\ x(z_1+x_1)+y\{\tau(\alpha z_1-\beta x_1)+z_1+x_1\}+z[\tau\{(\gamma+\alpha)z_1+\gamma x_1\}+z_1+x_1]=0 \end{array}\right\} 1).$$

Voor de rechten uit A′, B′, C′ loodrecht op BQ, CR, AP heeft men verder

$$\left.\begin{array}{l} x[\tau\{\beta x_1+y_1(\alpha+\beta)\}+y_1]+yy_1+z[\tau\{x_1(\beta+\gamma)+\beta y_1\}+y_1]=0 \\ x[\tau\{z_1(\gamma+\alpha)+\gamma x_1\}+x_1]+y[\tau\{\gamma z_1+(\beta+\gamma)x_1\}+x_1]+zx_1=0 \\ xz_1+y[\tau\{(\alpha+\beta)y_1+\alpha z_1\}+z_1]+z[\tau\{\alpha y_1+(\gamma+\alpha)z_1\}+z_1=0 \end{array}\right\} 2).$$

Voor de rechten uit A′, B′, C′ loodrecht op CR, AP, BQ

$$\left.\begin{array}{l} x\{\tau(\alpha z_1-\beta x_1)+z_1\}+yz_1-z[\tau\{\gamma z_1+x_1(\beta+\gamma)\}-z_1]=0 \\ -x[\tau\{\alpha y_1+z_1(\gamma+\alpha)\}-y_1]+y\{\tau(\beta y_1-\gamma z_1)+y_1\}+zy_1=0 \\ xx_1-y[\tau\{\beta x_1+y_1(\alpha+\beta)\}-x_1]+z\{\tau(\gamma x_1-\alpha y_1)+x_1\}=0 \end{array}\right\} 3).$$

Voor de rechten uit A′, B′, C′ evenwijdig met AP, BQ, CR

$$\left.\begin{array}{l} x\{\tau z_1-(\beta y_1-\gamma z_1)\}-y(\beta y_1-\gamma z_1)+z\{\tau(y_1+z_1)-(\beta y_1-\gamma z_1)\}=0 \\ x\{\tau(x_1+y_1)-(\gamma x_1-\alpha y_1)\}+y\{\tau y_1-(\gamma x_1-\alpha y_1)\}-z(\gamma x_1-\alpha y_1)=0 \\ -x(\alpha z_1-\beta x_1)+y\{\tau(z_1+x_1)-(\alpha z_1-\beta x_1)\}+z\{\tau x_1-(\alpha z_1-\beta x_1)\}=0 \end{array}\right\} 4).$$

Voor de lijnen uit A′, B′, C′ evenwijdig met BQ, CR, AP

$$\left.\begin{array}{l} x\{x_1\tau+(\beta+\gamma)x_1+\beta y_1\}+y\{(\beta+\gamma)x_1+\beta y_1\}- \\ \qquad -z\{\tau y_1-(\beta+\gamma)x_1-\beta y_1\}=0 \\ -x\{\tau x_1-(\gamma+\alpha)z_1-\gamma x_1\}+y\{\tau z+(\gamma+\alpha)z_1+\gamma x_1\}+ \\ \qquad +z\{(\gamma+\alpha)z_1+\gamma x_1\}=0 \\ x\{(\alpha+\beta)y_1+\alpha z_1\}-y\{\tau z_1-(\alpha+\beta)y_1-\alpha z_1\}+ \\ \qquad +z\{\tau y_1+(\alpha+\beta)y_1+\alpha z_1\}=0 \end{array}\right\} 5).$$

Voor de lijnen uit A′, B′, C′ evenwijdig met CR, AP, BQ

$$\left.\begin{array}{l} x\{\tau(z_1+x_1)+\gamma z_1+(\beta+\gamma)x_1\}+y\{\gamma z_1+(\beta+\gamma)x_1\}+ \\ \qquad +z\{\tau z_1+\gamma z_1+(\beta+\gamma)x_1\}=0 \\ x\{\tau y_1+\alpha y_1+(\gamma+\alpha)z_1\}+y\{\tau(y_1+z_1)+\alpha y_1+(\gamma+\alpha)z_1\}+ \\ \qquad +z\{\alpha y_1+(\gamma+\alpha)z_1\}=0 \\ x\{\beta x_1+(\alpha+\beta)y_1\}+y\{\tau x_1+\beta x_1+(\alpha+\beta)y_1\}+ \\ \qquad +z\{\tau(x_1+y_1)+\beta x_1+(\alpha+\beta)y_1\}=0 \end{array}\right\} 6).$$

Deze zes stellen lijnen gaan elk door één punt, daar de minoren van de determinanten, die de overeenkomstige voorwaarden geven, allen als factor bezitten $x_1y_1 + y_1z_1 + z_1x_1$ en deze vorm nul is, wanneer het barycentrisch puntentripel gelegen is op de ellips van STEINER.

Vraagstuk CXIX.

L[1] 2 b. Gevraagd

a) de meetkundige plaats der hoekpunten,

b) de omhullende der zijden,

c) de meetkundige plaats der middelpunten

van de gelijkzijdige pooldriehoeken eener ellips.

(Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

1. Stelt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ de ellips voor en zijn

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_1 + \rho\cos(\alpha + 30^\circ) \\ y_1 + \rho\sin(\alpha + 30^\circ) \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_1 + \rho\cos(\alpha - 30^\circ) \\ y_1 + \rho\sin(\alpha - 30^\circ) \end{matrix}\right\}$$

de coördinaten van de hoekpunten des gelijkzijdigen driehoeks, dan gelden de drie voorwaarden

$$b^2x_1[x_1 + \rho\cos(\alpha \pm 30^\circ)] + a^2y_1[y_1 + \rho\sin(\alpha \pm 30^\circ)] = a^2b^2,$$

$$b^2[x_1 + \rho\cos(\alpha + 30^\circ)][x_1 + \rho\cos(\alpha - 30^\circ)] +$$
$$+ a^2[y_1 + \rho\sin(\alpha + 30^\circ)][y_1 + \rho\sin(\alpha - 30^\circ)] = a^2b^2,$$

welke zich laten herleiden tot

$$\left.\begin{matrix} 2(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2) + \rho(b^2x_1\cos\alpha + a^2y_1\sin\alpha)\sqrt{3} = 0, \\ b^2x_1\sin\alpha = a^2y_1\cos\alpha, \\ 4(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2) = \rho^2[(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)b^2 + (3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)]. \end{matrix}\right\} \ldots 1).$$

Hieruit vindt men

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}, \quad \cos\alpha = \frac{b^2x_1}{\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{a^2y_1}{\sqrt{a^4y_1^2 - b^4x_1^2}}$$

en

$$\rho\sqrt{3} = -\frac{2\,(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2)}{\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}}.$$

Door invoeging dezer waarden in de derde der vergelijkingen 1) vindt men, na weglating der aanwijzers bij x_1 en y_1, voor de vergelijking van de meetkundige plaats der hoekpunten

$$b^4x^4 + (8a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4)x^2y^2 + a^4y^4 + b^4(3b^2 - a^2)x^2 + a^4(3a^2 - b^2)y^2 = 0;$$

dus is deze een kromme van den vierden graad met een dubbelpunt in het middelpunt der ellips, waarvan de assen der ellips symmetrie-assen zijn.

Volgens de wet van wederkeerigheid blijkt de omhullende der zijden nu een kromme van de vierde klasse te zijn, die eveneens de assen der ellips tot symmetrie-assen heeft en waarvan de lijn in het oneindige een dubbelraaklijn is.

2. Ter bepaling van de meetkundige plaats van het middelpunt des driehoeks nemen we

$$\left.\begin{matrix} x_1 + \rho\cos\alpha \\ y_1 + \rho\sin\alpha \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_1 + \rho\cos(\alpha + 120^\circ) \\ y_1 + \rho\sin(\alpha + 120^\circ) \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_1 + \rho\cos(\alpha - 120^\circ) \\ y_1 + \rho\sin(\alpha - 120^\circ) \end{matrix}\right\}$$

als coördinaten der hoekpunten aan. Vervangen we kortheidshalve $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2$ door E_1 en $a^2 - b^2$ door c^2, dan vinden we de drie voorwaarden

$$\left.\begin{aligned} &2E_1 + \rho\,(b^2x_1\cos\alpha + a^2y_1\sin\alpha) - \rho^2(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) = 0 \\ &\qquad b^2x_1\sin\alpha - a^2y_1\cos\alpha = c^2\rho\sin\alpha\cos\alpha \\ &4E_1 - 4\rho\,(b^2x_1\cos\alpha + a^2y_1\sin\alpha) + \\ &\quad + \rho^2(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha - 3a^2\cos^2\alpha - 3b^2\sin^2\alpha) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots 2).$$

Uit de eerste en derde vindt men door eliminatie van den middelsten term

$$4E_1 = (a^2 + b^2)\,\rho^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3).$$

Daarna geeft quadrateering van

$$2\,(b^2x_1 \sin\alpha - a^2y_1 \cos\alpha) = c^2\rho \sin 2\alpha\,,$$

$$2\,(b^2x_1 \cos\alpha + a^2y_1 \sin\alpha) = c^2\rho \cos 2\alpha$$

en optelling

$$4\,(b^4x_1^2 + a^4y_1^2) = c^4\rho^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4)$$

Dus volgt uit 3) en 4) met weglating der indices

$$c^4\mathrm{E} = 4\,(a^2 + b^2)\,(b^4x^2 + a^4y^2)$$

of

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2 - 3b^2}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\dfrac{c^2}{\sqrt{3a^2 - b^2}}\right)^2} = 1.$$

Voor $a > b\sqrt{3}$ is de meetkundige plaats der middelpunten dus een hyperbool.

Opmerkingen van Dr. P. Zeeman. 1. Eene oplossing van de onder a) en c) gestelde vragen komt voor in *A collection of examples and problems on conics and some of the higher plane curves by* R. A. Roberts, *M. A. Dublin and London* 1882, bl. 13 en 21. Daarin wordt vooral de meetkundige plaats der middelpunten van de gelijkzijdige pooldriehoeken op zeer eenvoudige wijze afgeleid, door gebruik te maken van de invarianten Δ, Θ, Θ', Δ' (notatie van Salmon).

2. In 't volgende wordt een andere, wel is waar iets langere, doch elementaire oplossing gegeven van het meer algemeene vraagstuk:

Te bepalen de meetkundige plaats der hoekpunten van alle pooldriehoeken eener ellips, die gelijkvormig zijn met een gegeven driehoek, zoodat de hoeken een gegeven grootte α, β en γ hebben.

Zoeken wij de meetkundige plaats van 't hoekpunt C van den hoek γ. Laten de coördinaten van dat punt zijn x_1 en y_1; de vergelijkingen der zijden CA en CB van den pooldriehoek

$$\mathrm{Y} - y_1 = m_1\,(\mathrm{X} - x_1) \quad , \quad \mathrm{Y} - y_1 = m_2\,(\mathrm{X} - x_1) \; . \; . \; . \; 1).$$

Deze rechten moeten toegevoegd zijn ten opzichte van de ellips; tusschen de richtingscoëfficienten m_1 en m_2 bestaat dus de betrekking

$$m_1m_2\,(a^2 - x_1^2) + (m_1 + m_2)\,x_1y_1 + (b^2 - y_1^2) = 0 \; . \; . \; . \; 2).$$

Verder moeten de rechten CA en CB hoeken α en β maken met de derde zijde van den pooldriehoek, d. i. de poollijn van C. Omdat de richtingscoëfficient dier poollijn is $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ zal men hebben

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1 + \frac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1 - \frac{b^2x_1}{a^2y_1}m_1}, \quad \operatorname{tg}\beta = -\frac{m_2 + \frac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1 - \frac{b^2x_1}{a^2y_1}m_2} \quad \ldots 3),$$

of twee betrekkingen, die men hieruit verkrijgt, door α en β te verwisselen.

Uit de betrekkingen 3) vindt men door m_1 en m_2 op te lossen

$$m_1 + m_2 = \frac{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)(a^4y_1^2 - b^4x_1^2) - 2a^2b^2x_1y_1 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 2a^2b^2x_1y_1}{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)a^2b^2x_1y_1 - b^4x_1^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + a^4y_1^2}$$

$$m_1m_2 = -\frac{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)a^2b^2x_1y_1 + a^4y_1^2 \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta - b^4x_1^2}{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)a^2b^2x_1y_1 - b^4x_1^2 \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta + a^4y_1^2}.$$

Substitueert men deze uitdrukkingen in de betrekking 2), dan verkrijgt men de meetkundige plaats der hoekpunten C van die pooldriehoeken der gegeven ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, waarvan de hoeken gegeven grootte α, β en γ hebben, terwijl C het hoekpunt van den hoek γ is.

De vergelijking dier meetkundige plaats is

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 - a^2b^2(b^2x^2 + a^2y^2) - c^2xy(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) +$$
$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta (a^6y^2 + b^6x^2 - c^4x^2y^2) = 0 \quad \ldots . \quad 4).$$

Eigenlijk is dit slechts een deel der meetkundige plaats van C. Het andere deel verkrijgt men door eenvoudig α en β te verwisselen. Derhalve:

De meetkundige plaats van elk hoekpunt van een pooldriehoek eener ellips, die een gegeven vorm heeft, bestaat uit twee biquadratische krommen.

Is $\alpha = \beta$, dan vallen de beide krommen samen, en heeft men:

De meetkundige plaats der toppen van alle gelijkbeenige pooldriehoeken eener ellips, bij welke de hoeken aan de basis een gegeven grootte α hebben, is de biquadratische kromme

$$(b^2x^2+a^2y^2)^2-(b^2x^2+a^2y^2)\,a^2b^2+\operatorname{tg}^2\alpha\,(a^6y^2+b^6x^2-c^4x^2y^2)=0\;..\;5).$$

Voor gelijkzijdige pooldriehoeken vallen de meetkundige plaatsen der hoekpunten samen en verkrijgt men

De meetkundige plaats der hoekpunten van alle gelijkzijdige pooldriehoeken eener ellips is de biquadratische kromme

$$(b^2x^2+a^2y^2)^2-(b^2x^2+a^2y^2)\,a^2b^2+3\,(b^6x^2+a^6y^2-c^4x^2y^2)=0\;..\;6).$$

3. De vergelijking 4) stelt, wanneer men daarin aan α en β alle mogelijke waarden geeft, een net van biquadratische krommen voor. Deze krommen hebben in 't algemeen een dubbelpunt in het middelpunt der gegeven ellips. Raaklijnen der kromme in dat punt zijn de beide rechten, bepaald door de vergelijking

$$a^2b^2\,(b^2x^2+a^2y^2)-a^2b^2c^2(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\,xy-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\,(b^6x^2+a^6y^2)=0.$$

Deze raaklijnen kunnen imaginair zijn, in welk geval het middelpunt een geïsoleerd punt wordt.

Wanneer zich dit geval voordoet, zullen wij niet in 't algemeen onderzoeken, doch alleen in 't bijzondere geval, dat wij met de kromme 6), de meetkundige plaats der hoekpunten van gelijkzijdige pooldriehoeken der gegeven ellips, te doen hebben. In dat geval zijn de raaklijnen in 't dubbelpunt

$$b^4\,(3b^2-a^2)\,x^2+a^4\,(3a^2-b^2)\,y^2=0.$$

Deze zullen (voor $a > b$) alleen dan reëel zijn, wanneer $3b^2 < a^2$ is. Is $3b^2 = a^2$, dan gaat de kromme 6) over in

$$(x^2-3y^2)^2+72b^2y^2=0.$$

Van deze kromme zijn alleen reëel het middelpunt der ellips en de beide punten in 't oneindige op de rechten $x = \pm\, y\sqrt{3}$. In dat geval vormen de gelijke middellijnen der ellips een hoek

van 60° met elkaar en is de oenige reëele gelijkzijdige pooldriehoek van deze ellips de driehoek die de drie reëele punten der kromme tot hoekpunten heeft. Is $3b^2 > a^2$, dan toont men langs eenvoudigen weg aan, dat de kromme 6), op het centrum der ellips na, dat een geïsoleerd punt zal zijn, geheel imaginair is. Derhalve:

Bij een ellips komen alleen dan gelijkzijdige pooldriehoeken voor, wanneer de hoek gevormd door de gelijke middellijnen dier ellips kleiner dan 60° is.

4. Op de volgende wijze kan men, voor een gegeven ellips, gelijkzijdige pooldriehoeken construeeren. Laten OA_1 $(=a_1)$ en OB_1 $(=b_1)$ twee toegevoegde voerstralen zijn, P, op OA_1 gelegen, een hoekpunt van een gelijkzijdigen pooldriehoek. Is de koorde GH, evenwijdig aan OB_1, de poollijn van het punt P, dan verkrijgt men dien gelijkzijdigen pooldriehoek door uit P twee rechten PC en PD te brengen, die met GH hoeken van 60° maken; de beide punten C en D moeten dan ten opzichte van de ellips toegevoegd zijn.

Is nu $OP = \rho$ en Q het snijpunt van OP met GH, dan zal $OQ = \frac{a_1^2}{\rho}$ en dus $PQ = \frac{\rho^2 - a_1^2}{\rho}$ zijn. Is verder ϕ de hoek, dien de toegevoegde middellijnen OA_1 en OB_1 met elkander maken, dan volgt uit de driehoeken PQC en PQD

$$PQ : QC = \sin 60° : \sin (60° - \phi)$$

$$PQ : QD = \sin 60° : \sin (60° + \phi).$$

Derhalve

$$QC \,.\, QD = PQ^2 \frac{\sin (60° - \phi) \sin (60° + \phi)}{\sin^2 60°} =$$

$$= \frac{(\rho^2 - a_1^2)^2}{\rho^2} \frac{\sin (60° - \phi) \sin (60° + \phi)}{\sin^2 60°}.$$

Daar de punten C en D aan elkaar toegevoegd zijn ten opzichte van de ellips, is

$$QC \,.\, QD = QH^2 = b_1^2 \left(1 - \frac{a_1^2}{\rho^2}\right) = b_1^2 \frac{\rho^2 - a_1^2}{\rho^2}.$$

Door gelijkstelling der beide voor QC . QD gevonden waarden vindt men

$$\rho^2 - a_1^2 = \frac{b_1^2 \sin^2 60^\circ}{\sin(60^\circ + \phi)\sin(60^\circ - \phi)}$$

of

$$\rho^2 - a_1^2 = \frac{3b_1^2}{3\cos^2\phi - \sin^2\phi}.$$

Brengt men nu door B_1 de rechten B_1L en B_1N, die beide met OB_1 hoeken van 60° maken en OA_1 in L en N snijden, dan is

$$OL = \frac{b_1 \sin 60^\circ}{\sin(60^\circ + \phi)}, \quad ON = \frac{b_1 \sin 60^\circ}{\sin(60^\circ - \phi)}.$$

Dus heeft men

$$\rho^2 - a_1^2 = OL \,.\, ON \quad \text{of} \quad PA_1 \,.\, PA_2 = OL \,.\, ON.$$

Hieruit leidt men een eenvoudige constructie van 't punt P af, die zich ook laat uitvoeren voor het geval, dat P niet hoekpunt van een gelijkzijdigen pooldriehoek der ellips, doch van een pooldriehoek van gegeven vorm moet zijn.

Vraagstuk CXX.

L[1] 18 a. Welke betrekking bestaat er tusschen twee kegelsneden, wanneer de invarianten Δ, Θ, Θ', Δ' (notatie van SALMON) verbonden zijn door de vergelijking

$$\Delta\Theta'^3 = \Delta'\Theta^3.$$

(Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

1. Nemen we aan, dat de vergelijkingen der kegelsneden op den gemeenschappelijken pooldriehoek in den vorm

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad S' \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

gegeven zijn, dan vinden we

$$\Delta = 1,\ \theta = a + b + c,\ \theta' = bc + ca + ab,\ \Delta' = abc.$$

Onderstellen we, dat de beide krommen beschreven zijn om denzelfden driehoek en stellen we

$$S \equiv 2(yz + zx + xy) = 0,\ S' \equiv 2(ayz + bzx + cxy) = 0,$$

dan is

$$\Delta = 2,\ \theta = 2(a + b + c),\ \theta' = 2(bc + ca + ab),\ \Delta' = 2\,abc.$$

In het eene geval zijn dus de invariantenwaarden evenredig met die van het andere.

2. De vier snijpunten van S en S′ geven met een willekeurig punt van S (of S′) verbonden een standvastige dubbelverhouding λ (of λ'). We zullen deze in de invarianten uitdrukken.

Maken we van het tweede stel vergelijkingen gebruik en leggen we het bewegelijke punt in het snijpunt $y = 0$, $z = 0$, dan is λ de dubbelverhouding van het viertal lijnen bestaande uit de raaklijn in dit punt aan $S = 0$, de y-as, de z-as en de lijn $(c - a)y = (a - b)z$ naar het vierde snijpunt, waaraan in den vorm $y = \mu z$ achtereenvolgens de waaarden

$$-1,\ \infty,\ 0,\ \frac{a - b}{c - a}$$

van μ beantwoorden. Langs den door CLEBSCH aangegeven weg (CLEBSCH-LINDEMANN, I, blz. 229) bepalen we de vergelijking, die de overeenkomstige zes dubbelverhoudingen tot wortels heeft. Nu is de biquadratische vergelijking in μ met de vier aangegeven wortelwaarden

$$(c - a)\mu^3 + (b + c - 2a)\mu^2 + (b - a)\mu = 0,$$

en hieruit volgt dan voor de invarianten i en j

$$i = 2\left[-(b - a)(c - a) + \tfrac{1}{3}(b + c - 2a)^2\right],$$

$$j = \left[(b - a)(c - a) - \tfrac{2}{9}(b + c - 2a)\right](b + c - 2a)$$

en dus (t. a. p., blz. 239)

$$\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{(1+\lambda)^2(2-\lambda)^2(1-2\lambda)^2}=\frac{(b^2+c^2+a^2-bc-ca-ab)^3}{(b+c-2a)^2(c+a-2b)^2(a+b-2c)^2}=$$

$$=\frac{(\theta^2-3\Delta\theta')^3}{(2\theta^3-9\theta\theta'\Delta+27\Delta^2\Delta')^2}.$$

Dus vormen de vier snijpunten op $S=0$

een *harmonisch* quadrupel voor $2\theta^3-9\theta\theta'\Delta+27\Delta^2\Delta'=0$

en een *aequianharmonisch* quadrupel voor . . . $\theta^2-3\Delta\theta'=0$.

3. Wanneer is $\lambda=\lambda'$? Eigenlijk, d. w. z. als de volgorde in beide gevallen dezelfde is, wanneer de kegelsneden samenvallen ($a=b=c=1$). Doch het zestal waarden λ wordt ook gelijk aan het zestal waarden λ' voor $\lambda=\frac{1}{\lambda'}$ of $\lambda=1-\lambda'$ enz. Schrijven we eenvoudigheidshalve p, q, r, s voor Δ, θ, θ', Δ', dan gebeurt dit dus voor

$$\frac{(q^2-3pr)^3}{(r^2-3qs)^3}=\frac{(2q^3-9pqr+27p^2s)^2}{(2r^3-9qrs+27ps^2)^2},$$

waaraan klaarblijkelijk voldaan wordt door te stellen

$$\frac{q^3}{r^3}=\frac{p}{s}.$$

Dit is werkelijk de verlangde voorwaarde. Want deze moet in de coëfficiënten a, b, c van den zesden graad zijn. Immers, als $S'=0$ vervangen wordt door $S+\nu S'=0$, is ze, omdat er klaarblijkelijk in den bundel zes kegelsneden zijn, waarvoor de voorwaarde $\lambda'=\lambda$ geldt, in ν van den zesden graad. De overblijvende factor komt voor in den vorm

$$4\alpha^2\beta^2+3\alpha\beta\gamma^2+\gamma^4=0,$$

waarin

$$\alpha=q^2-3pr,\ \beta=r^2-3qs,\ \gamma=qr-9ps$$

is. Aan deze vergelijking voldoet werkelijk de onderstelling $a=b=c=1$. Wat beteekent ze in het algemeen?

4. Natuurlijk is het niet moeielijk het overeenkomstige

onderzoek met betrekking tot de vier gemeenschappelijke raaklijnen te voeren. We gaan dan uit van de tangentieele vergelijkingen

$$\Sigma \equiv u^2 + v^2 + w^2 = 0, \quad \Sigma' \equiv \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 0.$$

Dan is

$$\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{(1+\lambda)^2(2-\lambda)^2(1-2\lambda)^2} = \frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}\right)^3}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{a}\right)^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{2}{b}\right)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{c}\right)^2} =$$

$$= \frac{(\theta'^2 - 3\theta\Delta')^3}{(2\theta'^3 - 9\theta\theta'\Delta' + 27\Delta\Delta'^2)^2}.$$

Hieruit volgt derhalve de algemeene stelling:

„De dubbelverhouding, die de vier gemeenschappelijke punten „van S en S′ *in* S (of S′) bepalen, is gelijk aan de dubbel„verhouding der vier gemeenschappelijke raaklijnen van S en S′ „*om* S′ (of S)."

Deze uitkomst is meetkundig onmiddellijk duidelijk, als men de kegelsneden

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad S' \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

beschouwt als elkaars weerkeerige poolfiguren met betrekking tot de kegelsnede

$$x^2\sqrt{a} + y^2\sqrt{b} + z^2\sqrt{c} = 0.$$

Zoo vindt men ten slotte, dat $\Delta\theta'^3 = \theta^3\Delta'$ de voorwaarde is, waaronder de vier snijpunten in S en de vier gemeenschappelijke raaklijnen om S hetzelfde zestal dubbelverhoudingen bepalen.

Vraagstuk CXXI.

N⁴ 1 d. Men vraagt een onderzoek van het stelsel quadratische oppervlakken

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\,yz + (c^2 + a^2 - b^2)\,zx +$$
$$+ (a^2 + b^2 - c^2)\,xy = 4s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c),$$

waarin $2s = a + b + c$ is. (Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* Dr. C. STOLP *en* Dr. A. TOXOPEUS.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

1. Wij nemen $0 < a \leqq b \leqq c$ aan en stellen

$$4s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c) = \mathrm{P},$$

$$\tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = \mathrm{A}, \quad \tfrac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2) = \mathrm{B}, \quad \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = \mathrm{C},$$

of

$$a^2 = \mathrm{B} + \mathrm{C}, \quad b^2 = \mathrm{C} + \mathrm{A}, \quad c^2 = \mathrm{A} + \mathrm{B}.$$

Onze vergelijking wordt dan

$$(\mathrm{B} + \mathrm{C})\,x^2 + (\mathrm{C} + \mathrm{A})\,y^2 + (\mathrm{A} + \mathrm{B})\,z^2 + 2\mathrm{A}yz + 2\mathrm{B}zx + 2\mathrm{C}xy = \mathrm{P},$$

of wel, na een kleine herleiding

$$\mathrm{A}\,(y + z)^2 + \mathrm{B}\,(z + x)^2 + \mathrm{C}\,(x + y)^2 = \mathrm{P} \;.\;.\;.\;.\;.\; 1)$$

Blijkens de gemaakte onderstellingen zijn A, B, s, $s - a$ en $s - b$ altijd positief en heeft P hetzelfde teeken als $s - c$.

Is nu $a^2 + b^2 > c^2$, dan zijn C, $s - c$ en P eveneens positief en is 1) de vergelijking eener ellipsoïde.

Is $(a + b)^2 > c^2 > a^2 + b^2$, dan zijn $s - c$ en P nog positief, maar is C negatief. Het oppervlak is een hyperboloïde met één blad.

Is eindelijk $c > a + b$, dan zijn $s - c$, P en C negatief en stelt 1) een hyperboloïde met twee bladen voor.

Tusschen deze drie hoofdvormen staan als overgangsvormen de elliptische cylinder ($\mathrm{C} = 0$) en de quadratische kegel ($\mathrm{P} = 0$).

In het eerste geval heeft men $a^2 + b^2 = c^2$, dus $\mathrm{A} = b^2$, $\mathrm{B} = a^2$, $2s\,(s - c) = ab$, $2\,(s - a)\,(s - b) = ab$, $\mathrm{P} = a^2b^2$, en wordt de vergelijking van het oppervlak

$$\frac{(y + z)^2}{a^2} + \frac{(z + x)^2}{b^2} = 1.$$

In het tweede geval is $a+b=c$, $A=b(a+b)$, $B=a(a+b)$, $C=-ab$ en de vergelijking van den kegel is

$$\frac{(y+z)^2}{a}+\frac{(z+x)^2}{b}-\frac{(x+y)^2}{a+b}=0.$$

2. Door de coördinaatassen te laten samenvallen met de assen van het quadratisch oppervlak, geraakt men tot een vergelijking van den vorm

$$\frac{\xi^2}{\mu_1}+\frac{\eta^2}{\mu_2}+\frac{\zeta^2}{\mu_3}=P, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

waarin μ_1, μ_2 en μ_3 de wortels eener derde-machts-vergelijking zijn. Daar men nu de uit 1) verkregen uitkomsten even goed moet kunnen afleiden uit 2), zullen de teekens van μ_1, μ_2 en μ_3 moeten overeenstemmen met die van A, B en C, en zal dus de derde-machts-vergelijking zelve daarvan het kenmerk moeten dragen. Het laatste willen we even aantoonen.

Het oppervlak 1) wordt door een boloppervlak $x^2+y^2+z^2=\mu P$ gesneden volgens een spherische ellips. Om de vergelijking te verkrijgen van den door deze kromme gaanden kegel, die zijn top in het bolmiddelpunt heeft, moet men P uit de vergelijking van den bol en die van het gegeven oppervlak 1) elimineeren. Doet men dit, na eerst de vergelijking van den bol geschreven te hebben onder de gedaante

$$(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-(x+y+z)^2=\mu P,$$

en vervangt men daarna $y+z$, $z+x$, $x+y$ door u, v, w, dan vindt men

$$F\equiv(A\mu-1)u^2+(B\mu-1)v^2+(C\mu-1)w^2+\tfrac{1}{4}(u+v+w)^2=0.$$

Wanneer nu μ een der bijzondere waarden heeft, die de spherische ellips in twee bestaanbare of onbestaanbare cirkels doen overgaan, zal de kegel in de twee cirkelvlakken veranderen en zullen de drie vlakken

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial F}{\partial u}&\equiv 4(A\mu-1)u+u+v+w=0,\\ 2\frac{\partial F}{\partial v}&\equiv 4(B\mu-1)v+u+v+w=0,\\ 2\frac{\partial F}{\partial w}&\equiv 4(C\mu-1)w+u+v+w=0,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

elkaar snijden volgens de doorsnede dier cirkelvlakken, d. i. volgens een as van het quadratisch oppervlak. De eliminatie der verhoudingen van u, v en w voert dan tot een identiteit, die men gemakkelijk verkrijgt, wanneer men de vergelijkingen 3) achtereenvolgens door $A\mu - 1$, $B\mu - 1$ en $C\mu - 1$ deelt en ze daarna bij elkaar optelt. Men krijgt dan, na weglating van den factor $u + v + w$,

$$4 + \frac{1}{A\mu - 1} + \frac{1}{B\mu - 1} + \frac{1}{C\mu - 1} = 0.$$

Wij geven aan deze vergelijking nog een andere gedaante door bij elke breuk de eenheid op te tellen, den eersten term met 3 te verminderen en de geheele vergelijking door μ te deelen. Ze wordt dan

$$\frac{1}{\mu} + \frac{A}{A\mu - 1} + \frac{B}{B\mu - 1} + \frac{C}{C\mu - 1} = 0 \quad \ldots\ldots 4)$$

Uit den vorm dezer vergelijking blijkt nu, dat de wortels het product $M \equiv \mu(A\mu - 1)(B\mu - 1)(C\mu - 1)$ tot een maximum of een minimum maken. Ze scheiden dus de wortels der vergelijking $M = 0$, waarvan er slechts één, n.l. $\frac{1}{C}$ negatief kan zijn. Is het laatste het geval, dan bezit 4) één negatieven wortel tusschen 0 en $\frac{1}{C}$; is C positief, dan zijn alle wortels van 4) positief.

3. De vergelijkingen 3), die de assen leveren, kunnen vervangen worden door

$$(A\mu - 1)u = (B\mu - 1)v = (C\mu - 1)w = -\tfrac{1}{4}(u + v + w),$$

of, wat hetzelfde is, door

$$(A\mu - 1)(y + z) = (B\mu - 1)(z + x) = (C\mu - 1)(x + y) = -\tfrac{1}{2}(x + y + z) \ldots 5).$$

Van deze vergelijkingen kan men altijd de eerste twee gebruiken, behalve voor een enkele as in één der gevallen $b = a$ of $b = c$. Is b.v. $b = a$, dus $B = A$, dan heeft M twee gelijke factoren $A\mu - 1$ en bezit de vergelijking $M' \equiv \frac{dM}{d\mu} = 0$ (d. i. de

vergelijking 4) met het product der noemers vermenigvuldigd) een wortel $\mu = \frac{1}{A}$. Voor deze waarde van μ gaan de vergelijkingen 5) over in

$$x + y = 0 \text{ en } x + y + z = 0.$$

Het vlak $x = y$, dat door het middelpunt loodrecht gebracht wordt op de door de laatste vergelijkingen bepaalde as, is natuurlijk een hoofdvlak, wat ook onmiddellijk uit 1) kan afgeleid worden. Is n.l. $A = B$, dan zijn x en y verwisselbaar en is dus het vlak $x = y$ een vlak van symmetrie.

Voor het geval $b = c$ geldt dezelfde beschouwing. Het oppervlak is dan een ellipsoïde ($C = B > 0$) en het vlak $y = z$ een hoofdvlak.

Is eindelijk $a = b = c$, dan is $z = x$ een derde hoofdvlak, dat door de doorsnede van de eerste twee gaat, zoodat het oppervlak een omwentelingsellipsoïde moet zijn met de rechte $x = y = z$ als omwentelingsas en het vlak $x + y + z = 0$ als aequatorvlak. De vergelijking $M' = 0$ heeft dan twee wortels $\frac{1}{A}$ en één wortel $\frac{1}{4A}$, zoodat de vergelijking 2) overgaat in

$$\xi^2 + \eta^2 + (2\zeta)^2 = \frac{P}{A} = \tfrac{3}{2} a^2.$$

Uit deze vergelijking blijkt nog, dat de straal van den aequator gelijk is aan de geheele omwentelingsas.

Vraagstuk CXXII.

K 6 b. Men beschouwt als coördinaten van een rechte haar afstanden u, v, w tot de vaste punten A, B, C. Welke identieke betrekking bestaat er tusschen u, v, w en de bepalende grootheden van driehoek ABC? (Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, Dr. E. JENSEMA, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF, Dr. A. J. A. PRANGE, Dr. A. VAN THIJN, Dr. A. TOXOPEUS *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. A. VAN THIJN *en* Dr. J. DE VRIES.

Zijn van een rechte de coördinaten u en v gegeven, dan kan zij gevonden worden als gemeenschappelijke raaklijn van twee cirkels, die A en B tot middelpunten hebben; en wel heeft men te maken met uitwendige of inwendige raaklijnen, naar gelang u en v gelijke of ongelijke teekens hebben.

De betrekking tusschen u, v en w bevat dus elke dezer grootheden tot den tweeden graad. Dat ze geen termen van den vorm u^2v^2 of u^2v kan bevatten, blijkt uit het bestaan van een rechte, waarvoor men heeft $u = v = -w$; in deze onderstelling moet de verlangde betrekking een zuivere vierkantsvergelijking in w opleveren, omdat men de coördinaten allen van teeken kan laten veranderen.

Uit de laatste opmerking volgt dan nog, dat de vergelijking ook geen termen van den eersten graad kan bevatten. Wij stellen dus

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + A'vw + B'wu + C'uv = D.$$

Hieraan moet voldaan worden door $u = 0$, $v = 0$, $w = \pm h_c$. Derhalve is $Ch^2_c = D$ of $4C\Delta^2 = c^2D$.

We kunnen nu stellen

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + pvw + qwu + ruv = 4\Delta^2.$$

De rechte door A evenwijdig met BC heeft tot coördinaten $u = 0$, $v = w = h_a$. Bijgevolg is

$$(b^2 + c^2 + p)\, h_a^2 = 4\Delta^2 = a^2h_a^2,$$

dus

$$p = a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A.$$

Ten slotte heeft men derhalve de betrekking

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + (a^2 - b^2 - c^2)\, vw + (b^2 - c^2 - a^2)\, wu + \\ + (c^2 - a^2 - b^2)\, uv = 4\Delta^2,$$

of

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 2bcvw \cos A - 2cawu \cos B - 2abuv \cos C = 4\Delta^2,$$

of

$$a^2(u-v)(u-w) + b^2(v-u)(v-w) + c^2(w-u)(w-v) = 4\Delta^2.$$

OPMERKING. Dit vraagstuk komt, met een schema voor de oplossing, voor in CASEY, Treatise on the Analytical Geometry, 1893, bl. 76 en in KILLING, Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten, Paderborn 1900, 1e deel, bl. 25. In het 2e deel vindt men, op bl. 25 de uitbreiding op de ruimte, dus een betrekking tusschen de afstanden van een vlak tot de hoekpunten van een viervlak. Deze kan op soortgelijke wijs worden afgeleid als met de bovengevonden vergelijking is geschied. (RED.)

Vraagstuk CXXIII.

M² 3 h β. Men vraagt de rechten te bepalen, welke gelegen zijn op het oppervlak

$$xyz + a(xy + yz + zx) + b(x + y + z) + c = 0.$$

(DR. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. C. STOLP, Dr. A. TOXOPEUS, Dr. J. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN GZ.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN GZ.

Een willekeurige rechte evenwijdig met de Z-as bevat slechts een in het eindige gelegen punt van het oppervlak

$$xyz + a(xy + xz + yz) + b(x + y + z) + c = 0 \quad . \; . \; . \; 1);$$

het oneindig ver gelegen punt van OZ is dus een dubbelpunt. De raaklijnen in dit punt vormen het hyperbolische cylindervlak

$$xy + a(x + y) + b = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2).$$

Evenzoo zijn de oneindig ver op OX en OY geplaatste punten kegelpunten van het oppervlak. Men ziet gemakkelijk in, dat er geen vierde kegelpunt is.

Het oppervlak bevat dus, behalve de drie in het oneindige gelegen verbindingslijnen der kegelpunten, negen rechte lijnen; daarvan gaan er twee door elk kegelpunt, terwijl de overige drie elk gelegen zijn in een vlak dat het oppervlak langs de verbindingslijn van twee kegelpunten aanraakt.

Een dezer drie rechten is blijkbaar de doorsnede van de vlakken

$$z + a = 0$$

en

$$(a^2 - b)(x + y) + (ab - c) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3).$$

De andere twee zijn aangewezen door

$$x + a = 0, \quad (a^2 - b)(y + z) + (ab - c) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4);$$

$$y + a = 0, \quad (a^2 - b)(x + z) + (ab - c) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5);$$

met de eerste liggen ze in het drievoudige raakvlak

$$(a^2 - b)(x + y + z) + (a^3 - c) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6).$$

Schrijft men de vergelijking van het oppervlak in den vorm

$$[xy + a(x + y) + b]z + [axy + b(x + y) + c] = 0 \quad . \quad . \quad 7),$$

dan blijkt dat de hyperbolische cylindervlakken

$$xy + a(x + y) + b = 0, \quad axy + b(x + y) + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

twee in het eindige gelegen rechten van het kubische oppervlak gemeen hebben. Deze rechten zijn de doorsneden van den cylinder $(a^2 - b)xy + (ac - b^2) = 0$ met het vlak $(a^2 - b)(x + y) + (ab - c) = 0$, liggen dus in een vlak met de door 3) bepaalde rechte.

Door cyclische verwisseling vindt men de beide ontbrekende paren van rechten.

Vraagstuk CXXIV.

M¹ 6 1. Men beschouwt een kromme van de vierde orde, welke door de hoekpunten van een volledige vijfzijde gaat. Aan te toonen, dat elk punt dezer kromme een hoekpunt is van een ingeschreven volledige vijfzijde. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. A. TOXOPEUS *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

De rechten a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, welke de vijfzijde vormen, worden aangeraakt door een kegelsnede C^2. We trekken aan

C^2 een willekeurige raaklijn b_1 en uit de vier snijpunten van b_1 met de gegeven kromme C^4 de raaklijnen b_2, b_3, b_4, b_5 aan C^2.

De raaklijnen van C^2 kunnen nu gerangschikt worden in de groepen van een involutie van den vijfden graad, welke door de vijftallen a_k en b_k bepaald is. Elk vijftal vormt een volledige vijfzijde, en de meetkundige plaats der tientallen van hoekpunten dezer vijfzijden is een kromme van den vierden graad, die met de gegeven C^4 gemeen heeft de tien punten $(a_k a_l)$ en de vier punten $(b_1 b_k)$. Daar deze vier punten in een rechte liggen, terwijl het blijkbaar niet mogelijk is een C^3 te laten gaan door de punten $(a_k a_l)$, vallen de beide krommen C^4 samen, en is elke vijfzijde van het door de involutie bepaalde stelsel beschreven in de gegeven C^4.

Vraagstuk CXXV.

N° 1 b. Voor elke kegelsnede van een bundel construeert men de cirkels, welke de assen tot middellijnen hebben. Hoeveel cirkels van het hierdoor verkregen stelsel gaan door een willekeurig aangenomen punt? (Dr. J. DE VRIES.)

Oplossing *van* Dr. E. JENSEMA *en* Dr. J. DE VRIES.

We stellen den bundel voor door de vergelijking

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} +$$
$$+ \lambda (b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}) = 0.$$

Het middelpunt der kegelsnede

$$c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}x + 2c_{23}y + c_{33} = 0$$

heeft tot coördinaten

$$x_0 = C_{13} : C_{33} \quad \text{en} \quad y_0 = C_{23} : C_{33},$$

als men door C_{kl} aanduidt den bij c_{kl} behoorenden onderdeterminant van den discriminant Γ.

Wordt dezelfde kegelsnede aangewezen door

$$\gamma_{11}\xi^2 + \gamma_{22}\eta^2 + \gamma_{33} = 0,$$

dan is

$$\gamma_{33} = \Gamma : C_{33},$$

terwijl γ_{11} en γ_{22} de wortels zijn van

$$\gamma^2 - (c_{11} + c_{22})\gamma + C_{33} = 0.$$

De stralen der cirkels, welke de assen der kegelsnede tot middellijnen hebben, zijn nu bepaald door

$$\rho_1^2 = -\gamma_{33} : \gamma_{11} \quad \text{en} \quad \rho_2^2 = -\gamma_{33} : \gamma_{22}.$$

Dus is

$$\gamma_{11} = -\gamma_{33} : \rho_1^2 \quad \text{en} \quad \gamma_{22} = -\gamma_{33} : \rho_2^2,$$

zoodat ρ_1^2 en ρ_2^2 de wortels zijn van

$$C_{33}\delta^2 + (c_{11} + c_{22})\gamma_{33}\delta + \gamma_{33}^2 = 0,$$

of, als men γ_{33} door $\Gamma : C_{33}$ vervangt, van

$$C_{33}^3\delta^2 + s\Gamma C_{33}\delta + \Gamma^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1),$$

waar $s = c_{11} + c_{22}$ is.

Elk der genoemde twee cirkels wordt voorgesteld door

$$\left(x - \frac{C_{13}}{C_{33}}\right)^2 + \left(y - \frac{C_{23}}{C_{33}}\right)^2 = \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2),$$

waar δ door ρ_1^2 of door ρ_2^2 is te vervangen.

Door eliminatie van δ uit de vergelijkingen 1) en 2) vindt men voor het samenstel der twee cirkels de vergelijking

$$\left.\begin{array}{c}[(C_{33}x - C_{13})^2 + (C_{33}y - C_{23})^2]^2 + \\ + s\Gamma[(C_{33}x - C_{13})^2 + (C_{33}y - C_{23})^2] + C_{33}\Gamma^2 = 0\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 3).$$

Hier bestaat de term, die onafhankelijk is van x en y, uit $C_{33}\Gamma^2$ en

$$(C_{13}^2 + C_{23}^2)^2 + s\Gamma(C_{13}^2 + C_{23}^2) = (C_{13}^2 + C_{23}^2)(C_{13}^2 + C_{23}^2 + s\Gamma).$$

Maar

$$C_{13}^2 + C_{23}^2 + s\Gamma = C_{13}^2 + C_{23}^2 + (c_{11} + c_{22})(c_{13}C_{13} + c_{23}C_{23} + c_{33}C_{33}) =$$

$$C_{13}(c_{12}c_{23} + c_{11}c_{13}) + C_{23}(c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23}) + C_{33}c_{33}(c_{11} + c_{22}) =$$

$$c_{13}(c_{11}C_{13} + c_{12}C_{23}) + c_{23}(c_{12}C_{13} + c_{22}C_{23}) + c_{33}(c_{11} + c_{22})C_{33} =$$

$$-c_{13}^2C_{33} - c_{23}^2C_{33} + (c_{11}c_{33} + c_{22}c_{33})C_{33} = (C_{11} + C_{22})C_{33}.$$

Hieruit volgt dat het linker lid van 3) door C_{33} kan gedeeld worden.

Vervangt men daarna de coëfficienten c_{kl} door $a_{kl} + \lambda b_{kl}$, dan komt in de nieuwe vergelijking λ in den zesden graad voor.

Derhalve gaan door een willekeurig punt *zes* cirkels van het bedoelde stelsel.

OPMERKING. Is $a_{33} = 0$ en $b_{33} = 0$, zoodat de oorsprong met een der basispunten samenvalt, dan vindt men uit 3) door de substitutie $x = 0$, $y = 0$, na eenige herleiding

$$\{(a_{12} + \lambda b_{12})\,[(a_{13} + \lambda b_{13})^2 + (a_{23} + \lambda b_{23})^2] -$$
$$- [(a_{11} + \lambda b_{11}) + (a_{22} + \lambda b_{22})]\,(a_{13} + \lambda b_{13})\,(a_{23} + \lambda b_{23})\}^2 = 0.$$

De zes cirkels, die door een basispunt gaan, vallen dus twee aan twee samen met een cirkel, die in dat basispunt een top heeft. (J. D. V.).

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

We beschouwen het bedoelde stelsel van cirkels als de cyclographische afbeelding van de ruimtekromme, die de meetkundige plaats is van de polen van elken cirkel op den bol, waarvan hij hoofdcirkel is. Elk vlak loodrecht op het vlak van den bundel bevat dan de middelpunten van twee kegelsneden, dus acht polen, zoodat de beeldkromme van den achtsten graad is.

Het net der cirkels, die door een punt P gaan, wordt afgebeeld door den omwentelingskegel, waarvan de rechten het vlak van den bundel in P onder een hoek van 45° snijden. Op dien kegel liggen, in het oneindige, vier punten, die afkomstig zijn van de ontaarde cirkels behoorende tot de beide parabolen van den bundel. Dus hebben beeldkromme en kegel twaalf eindige snijpunten, en ligt P op zes cirkels van het stelsel.

Vraagstuk CXXVI.

N° 1 b. Men beschouwt alle kegelsneden welke drie gegeven rechten aanraken, en beschrijft de cirkels welke de verbindingslijn der brandpunten van elke kegelsnede tot middellijn hebben. Hoeveel cirkels van dit stelsel gaan door twee willekeurige punten?

(Dr. J. DE VRIES.)

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

Wanneer we elken cirkel als den doorgang beschouwen van twee kegelvlakken, waarvan de beschrijvende lijnen het vlak der gegeven rechten onder hoeken van 45° snijden, dan vormen de toppen dier kegels een oppervlak dat het bedoelde stelsel van cirkels tot cyclographische afbeelding heeft. Dit oppervlak is blijkbaar van den vierden graad; immers elk punt is het middelpunt van één kegelsnede, dus van twee cirkels, die achtereenvolgens tot middellijn hebben den afstand der bestaanbare en den afstand der onbestaanbare brandpunten; dit punt is derhalve de projectie van vier punten van het oppervlak.

De cirkels welke door twee gegeven punten gaan, worden in de ruimte vertegenwoordigd door een gelijkzijdige hyperbool, waarvan de asymptoten hoeken van 45° maken met het vlak der kegelsneden.

De oneindig ver gelegen punten dezer hyperbool worden op het gegeven vlak afgebeeld door de bij een parabool van het stelsel kegelsneden behoorende ontaarde cirkels. Bijgevolg heeft onze hyperbool met het bovengenoemde oppervlak slechts vier eindige snijpunten; door twee punten gaan dus *twee* cirkels van het stelsel.

Is A een hoekpunt van den driehoek, die door de drie gegeven rechten wordt ingesloten, en A′ zijn projectie op de zijde BC, dan gaan door A en A′ oneindig vele cirkels van het stelsel. Immers A vormt met elk punt van BC een in twee punten ontaarde kromme der tweede klasse, welke tot het bedoelde stelsel behoort, en de cirkel, welke den afstand dier punten tot middellijn heeft, gaat door A′.

Vraagstuk CXXVII.

B 4 g. Men beschouwt de vormen

$$a^2_x \equiv (a_1x_1 + a_2x_2)^{(2)} \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \text{ en } b_x \equiv b_1x_1 + b_2x_2,$$

waarin x_1 en x_2 de rechthoekige coördinaten van een punt voorstellen. Aan te toonen, dat $(ab)a_b \equiv (a_1b_2 - a_2b_1)\ (a_1b_1 + a_2b_2)$ invariant is met betrekking tot de wenteling van het assenkruis om

den oorsprong, en na te gaan wat de beteekenis is van $(ab)a_b = 0$ voor de kegelsnede $a^2_x + b_x = 0$. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. A. TOXOPEUS *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

1. Zijn ξ_1 en ξ_2 de rechthoekige coördinaten van een punt (x_1, x_2) ten opzichte van een ander assenkruis, met denzelfden oorsprong, dan heeft men

$$x_1 = \lambda_{11}\xi_1 + \lambda_{12}\xi_2, \quad \xi_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{21}x_2,$$
$$x_2 = \lambda_{21}\xi_1 + \lambda_{22}\xi_2, \quad \xi_2 = \lambda_{12}x_1 + \lambda_{22}x_2,$$

waar de coëfficienten λ op bekende wijs afhangen van den wentelingshoek.

Wordt door deze substitutie a^2_x omgezet in a^2_ξ, dan is

$$a_x = a_1x_1 + a_2x_2 = (a_1\lambda_{11} + a_2\lambda_{21})\,\xi_1 + (a_1\lambda_{12} + a_2\lambda_{22})\,\xi_2,$$

dus

$$a_1 = \lambda_{11}a_1 + \lambda_{21}a_2,$$
$$a_2 = \lambda_{12}a_1 + \lambda_{22}a_2,$$

zoodat de symbolische coëfficienten geheel dezelfde substituties ondergaan als de veranderlijken.

Nu is $x_1^2 + x_2^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, dus ook $a_1^2 + a_2^2 = a_1^2 + a_2^2$, of, symbolisch $a_a = a_a$.

Ook $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ is een absolute covariant, bijgevolg ook $x_1y_1 + x_2y_2 \equiv x_y \equiv y_x$.

Verder is $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = x_xy_y - x_yy_x$ een absolute covariant.

We leiden hieruit af, dat de symbolen

$$a_a,\ a_b \text{ en } (ab)$$

absolute invarianten zijn, verbonden door de betrekking

$$(ab)^2 = a_ab_b - a^2_b.$$

Bijgevolg is $(ab)a_b$ tevens absoluut invariant. *)

2. Vervangen we de symbolische coëfficienten door de coëfficienten der vergelijking

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0,$$

*) Nadere bijzonderheden omtrent de orthogonale invarianten (seminvarianten) vindt men in mijn opstel over „Orthogonale comitanten", Versl. K. Ak. v. W., deel VIII (1900), bl. 562.

dan wordt de voorwaarde $(ab)a_i = 0$ omgezet in

$$(a_{11} - a_{22})\, b_1 b_2 = a_{12}\,(b_1^2 - b_2^2).$$

Wordt het assenkruis zoover gewenteld, dat de as $O\xi_2$ met de raaklijn in O samenvalt, dan is

$$a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 + \beta_1\xi_1 = 0.$$

Daar nu $\beta_2 = 0$ is, verandert de invariante betrekking in

$$a_{12}\beta_1^2 = 0,$$

en daar β_1 niet gelijk is aan nul, wordt

$$a_{11}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + \beta_1\xi_1 = 0.$$

Hieruit blijkt dat het centrum op $O\xi_1$ ligt, zoodat de oorsprong een top der kegelsnede is.

Vraagstuk CXXVIII.

K 13 c. Snijdt eene rechte de zijvlakken van het viervlak ABCD in de punten A′, B′, C′ en D′, dan vallen de beide transversalen der vier rechten AA′, BB′, CC′ en DD′ samen. Gevraagd dit te bewijzen. (Dr. P. Zeeman Gz.)

Oplossing *van* Dr. J. de Vries *en* Dr. P. Zeeman Gz.

Volgens een bekende eigenschap is de dubbelverhouding der punten A′, B′, C′, D′ welke een rechte l gemeen heeft met de vlakken BCD, CDA, DAB, ABC, even groot als de dubbelverhouding der vlakken lA, lB, lC, lD. Deze vlakken raken dus in A′, B′, C′, D′ aan de hyperboloïde die door AA′, BB′ en CC′ kan gelegd worden.

De rechte DD′, die in het raakvlak lD ligt en door het raakpunt D′ gaat, is dus een raaklijn der hyperboloïde; bijgevolg zijn de twee snijlijnen van AA′, BB′, CC′, DD′ in l vereenigd.

Vraagstuk CXXIX.

K 13 c. Verbindt men de hoekpunten A en A′, B en B′, C en C′, D en D′ der beide viervlakken ABCD en A′B′C′D′, dan

zullen de vier rechten AA′, BB′, CC′, DD′ door twee verschillende, òf door twee samenvallende, òf door ∞^1 òf door ∞^2 transversalen worden gesneden. Toon aan dat, welk dier gevallen zich voordoet, hetzelfde geval zal plaats vinden bij de vier doorsneden der paren overstaande zijvlakken. (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

1. Wordt ABCD tot coördinatentetraëder aangenomen, zoodat de puntcoördinaten van A, B, C en D achtereenvolgens zijn (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) en (0, 0, 0, 1), terwijl die der punten A_1, B_1, C_1, D_1 worden voorgesteld door a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4} waarin i achtereenvolgens gelijk aan 1, 2, 3 en 4 genomen wordt, dan zullen de rechten AA_1, BB_1, CC_1 en DD_1 bepaald worden door de volgende vergelijkingen in vlakcoördinaten

$$u_i = 0, \quad a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 + a_{i4}u_4 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Neemt men op de rechte AA_1 een willekeurig punt P, op BB_1 eveneens een willekeurig punt Q aan, dan zullen de vergelijkingen der verbindingslijn PQ in vlakcoördinaten zijn

$$\left.\begin{aligned}(a_{11} - \lambda)\,u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4 = 0\\ a_{21}u_1 + (a_{22} - \mu)\,u_2 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4 = 0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 1)$$

Hierin zijn λ en μ willekeurige parameters.

De voorwaarde, aan welke λ en μ moeten voldoen opdat men door PQ en CC_1 een vlak kan brengen, wordt verkregen door eliminatie van u_1, u_2, u_3 en u_4 uit 1) en de vergelijkingen van CC_1. Zij zal dus zijn

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \mu & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots 2)$$

Evenzoo is de voorwaarde, aan welke λ en μ voldoen moeten, opdat door PQ en DD_1 een vlak kan gebracht worden,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \mu & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots 3)$$

Bepaalt men λ en μ uit de beide betrekkingen 3) en 4), dan zal de rechte 1), die bij deze waarden behoort, de vier rechten AA_1, BB_1, CC_1 en DD_1 snijden, derhalve eene der transversalen van dit viertal zijn. Door eliminatie van μ verkrijgt men ter bepaling van λ de vierkantsvergelijking

$$\left.\begin{array}{c}\{a_{34}\,|\,a_{22}a_{43}\,| - a_{43}\,|\,a_{22}a_{34}\,|\}\,\lambda^2 + \\ + \{a_{34}A_{34} - a_{43}A_{43} - |\,a_{11}a_{34}\,|\,.\,|\,a_{22}a_{43}\,| + |\,a_{11}a_{43}\,|\,.\,|\,a_{22}a_{34}\,|\}\,\lambda + \\ + \{|a_{11}a_{43}\,|\,A_{43} - |\,a_{11}a_{34}\,|\,A_{34}\} = 0.\end{array}\right\} \ldots 4)$$

Hier zijn A_{34} en A_{43} eerste minoren van den determinant $\Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$, gevormd door de coördinaten van de vier punten A_1, B_1, C_1 en D_1, terwijl $|\,a_{22}\,a_{43}\,| = a_{22}a_{43} - a_{23}a_{42}$, enz. tweede minoren van dien determinant zijn.

Uit 4) volgt, dat in het algemeen de vier rechten AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 slechts door twee transversalen worden gesneden.

Deze beide transversalen vallen samen, wanneer de discriminant der vierkantsvergelijking verdwijnt, dus als men heeft

$$\left.\begin{array}{c}\{a_{34}A_{34} - a_{43}A_{43} - |\,a_{11}a_{34}\,|\,.\,|\,a_{22}a_{43}\,| + |\,a_{11}a_{43}\,|\,.\,|\,a_{22}a_{34}\,|\}^2 - \\ - 4\,\{a_{34}\,|\,a_{22}a_{43}\,| - a_{43}\,|\,a_{22}a_{34}\,|\}\,\{|\,a_{11}a_{43}\,|\,A_{43} - |\,a_{11}a_{34}\,|\,A_{34}\} = 0,\end{array}\right\} \ldots 5)$$

zonder dat elk der coëfficienten van de vergelijking 4) nul is.

2. In puntcoördinaten zijn de vergelijkingen der rechten $(BCD, B_1C_1D_1)$, $(CDA, C_1D_1A_1)$, $(DAB, D_1A_1B_1)$ en $(ABC, A_1B_1C_1)$

$$x_i = 0, \quad A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + A_{i3}x_3 + A_{i4}x_4 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Brengt men door de rechte $(BCD, B_1C_1D_1)$ een willekeurig vlak p en door de rechte $(CDA, C_1D_1A_1)$ een willekeurig vlak q, dan zal de doorsnede (p, q) dezer beide vlakken bepaald worden door de vergelijkingen

$$\begin{array}{c}(A_{11} - \lambda)\,x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 = 0, \\ A_{21}x_1 + (A_{22} - \mu)\,x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 = 0.\end{array}$$

Evenals boven vindt men, dat de doorsnede der vlakken p en q ook de rechten $(DAB, D_1A_1B_1)$ en $(ABC, A_1B_1C_1)$ zal snijden als λ een wortel is van de vierkantsvergelijking

$$\left.\begin{array}{c}\{A_{34}\,|\,A_{22}A_{43}\,| - A_{43}\,|\,A_{22}A_{34}\,|\}\,\lambda^2 + \\ + \{A_{34}a_{34} - A_{43}a_{43} - |A_{11}A_{34}\,|\,.\,|\,A_{22}A_{43}\,| + |\,A_{11}A_{43}|\,.\,|A_{22}A_{43}|\}\lambda + \\ + \{|A_{11}A_{43}\,|\,a_{43} - |\,A_{11}A_{34}\,|\,a_{34}\} = 0.\end{array}\right\} \ldots 6)$$

Hier is a_{34} een der eerste minoren van den determinant $\Sigma \pm A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}$ en wel de coëfficient van A_{34}.

De beide transversalen dezer vier rechten vallen dus samen wanneer voldaan wordt aan

$$\left.\begin{array}{l}\{A_{34}a_{34}-A_{43}a_{43}-|A_{11}A_{34}|\,.\,|A_{22}A_{43}|+|A_{11}A_{43}|\,.\,|A_{22}A_{43}|\}^2-\\ -4\{A_{34}|A_{22}A_{43}|-A_{43}|A_{22}A_{34}|\}\{|A_{11}A_{43}|a_{43}-|A_{11}A_{34}|a_{34}\}=0,\end{array}\right\}\;..\;7)$$

zonder dat elk der coëfficienten, in de vierkantsvergelijking 6) nul is.

3. Nu zijn

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \quad \text{en} \quad \Sigma \pm A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}$$

reciproke determinanten. Volgens bekende eigenschappen van zulke determinanten is dus

$$a_{34} = a_{34}\,\Delta^2,\; a_{43} = a_{43}\,\Delta^2,\; |A_{11}A_{34}| = |a_{22}a_{43}|\,\Delta \text{ enz.}$$

Zoodat, als de vergelijking 5) wordt voorgesteld door $D = 0$, de vergelijking 7) kan aangewezen worden door

$$\Delta^4\,.\,D = 0.$$

Hieruit volgt onmiddellijk:

Worden de vier rechten AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 door twee verschillende of door twee samenvallende transversalen gesneden, dan zullen ook de rechten $(BCD, B_1C_1D_1)$ enz. door twee verschillende of door twee samenvallende transversalen gesneden worden, en omgekeerd.

Worden verder de rechten AA_1, BB_1, CC_1 en DD_1 door ∞^1 rechten gesneden, dan moet elk stelsel waarden van λ en μ, dat aan 2) voldoet, ook 3) bevredigen. Daarvoor is, zooals een blik op die vergelijking doet zien, noodig en voldoende dat $a_{ij} = a_{ji}$ is, m. a. w. dat $\Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ eene symmetrische determinant is.

Op analoge wijze blijkt, dat de vier rechten $(BCD, B_1C_1D_1)$ enz. door ∞^1 rechten worden gesneden als $A_{ij} = A_{ji}$ of als de reciproke determinant $\Sigma \pm A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}$ symmetrisch is.

Daar beide determinanten tegelijk symmetrisch zijn, volgt uit de hyperboloïdische ligging der eerste vier rechten, die der andere vier en omgekeerd.

Dat eindelijk, als AA_1, BB_1, CC_1 en DD_1 door ∞^2 rechten

gesneden worden, dit ook het geval is met de vier rechten (BCD, $B_1C_1D_1$) enz. is eveneens uit het voorgaande af te leiden, doch volgt ook onmiddellijk daaruit, dat in dit geval de beide viervlakken perspectieve ligging hebben.

Vraagstuk CXXX.

O 2 g, P 1 b. Gegeven zijn twee collineaire vlakke stelsels Σ en Σ'. Met eene kromme C van Σ stemt in Σ' eene kromme C′ overeen. Hoe moet de kromme C gekozen worden opdat met de ontwondene van C in Σ de ontwondene van C′ in Σ' overeenkome.

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Meetkundige oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

1. Terwijl met de raaklijnen eener willekeurige kromme C in Σ steeds overeenstemmen de raaklijnen der homologe kromme C′ van Σ', zullen met de normalen van C in 't algemeen niet overeenkomen de normalen van C′. Zijn toch twee rechten van Σ onderling rechthoekig, dan vormen de homologe rechten van Σ' in 't algemeen geen rechten hoek. Slechts dan wanneer de kromme C zoo gekozen is, dat met hare normalen overeenstemmen de normalen van C′, zal met de omhullende der normalen, of de ontwondene van C, ook de ontwondene van C′ overeenkomen.

2. Als twee projectieve stralenbundels gegeven zijn, kan men in 't algemeen slechts op één wijs twee loodrechte stralen van den eenen bundel aanwijzen zoodat de homologe stralen van den anderen bundel eveneens loodrecht zijn. Een punt van Σ is dus in 't algemeen het hoekpunt van slechts één rechten hoek, waarmede in Σ' weder een rechte hoek overeenstemt.

3. In elk der stelsels komen twee punten voor, die op het voorgaande een uitzondering maken; elk hunner is hoekpunt van ∞^1 rechte hoeken, zoodanig dat de homologe hoeken in 't andere stelsel eveneens recht zijn. Die punten bepaalt men aldus: Zij l de rechte van Σ, die overeenstemt met de rechte in 't oneindige l'_∞ van Σ'. Laat men om een willekeurig punt

P′ van Σ′ een rechten hoek draaien, dan bepalen de beenen van dien hoek op l'_∞ eene involutie, die de imaginaire cirkelpunten tot dubbelpunten heeft. Met deze punteninvolutie in Σ′ komt in Σ eene punteninvolutie op l overeen; bepaalt men nu in Σ de beide punten A en B, uit welke de puntenparen der laatste involutie onder rechte hoeken gezien worden, dan bezitten deze punten de eigenschap, dat met elken rechten hoek in Σ, waarvan het hoekpunt in A of B valt, een rechte hoek overeenstemt. Of ook, als A′ en B′ de met A en B overeenstemmende punten van Σ′ zijn: In elk der beide stelsels Σ en Σ′ komen twee punten A, B en A′, B′ voor, die de eigenschap bezitten, dat elk hunner hoekpunt is eener rechthoekige straleninvolutie, zoodanig dat de homologe straleninvolutie van 't andere stelsel weder rechthoekig is of, wat op hetzelfde neerkomt, elk dezer punten is centrum van een stralenbundel, waarmede in 't andere stelsel een congruente stralenbundel overeenstemt. De punten A en B worden de *brandpunten* van het stelsel Σ, A′ en B′ die van het stelsel Σ′ genoemd. De brandpunten A en B liggen symmetrisch ten opzichte van l; evenzoo A′ en B′ ten opzichte van die rechte van Σ′, die overeenstemt met de rechte in 't oneindige van Σ.

4. Hieruit volgt, dat met elke kegelsnede in Σ, waarvan een brandpunt in A of B valt, zal overeenstemmen een kegelsnede in Σ′, die in A′ of B′ een brandpunt heeft, en dat met de confocale kegelsneden in Σ, waarvan de brandpunten in A en B vallen, zullen overeenstemmen die confocale kegelsneden van Σ′, welker brandpunten in A′ en B′ gelegen zijn.

5. Is nu P een willekeurig punt in Σ, dan bepaalt men als volgt den eenigen rechten hoek, die P tot hoekpunt heeft en waarmede een rechte hoek overeenstemt. Men brengt een cirkel door P, A en B, die de rechte l in de punten M en N snijdt, dan zal MPN de gevraagde hoek zijn. Immers $\angle$ MPN = $\angle$ MAN = 90°. Met den rechten hoek MAN stemt in Σ′ een rechte hoek M′A′N′ overeen en met MPN een hoek, waarvan de beenen evenwijdig zijn aan die van M′A′N′, welke hoek derhalve eveneens recht zal zijn. Daar in den cirkel PAB boog AN = boog BN is, zullen PN en PM de rechten zijn, die de door AP en BP gevormde hoeken middendoor deelen, of:

De beenen van den eenigen rechten hoek in Σ, die een willekeurig punt P van dit stelsel tot hoekpunt heeft en waarmede in Σ' een rechte hoek overeenstemt, zijn de raaklijn en de normaal van de beide kegelsneden van Σ, die door P gaan en de punten A en B tot brandpunten hebben.

6. Hieruit nu leidt men onmiddellijk af:

Is een willekeurige kromme C in Σ gegeven, waarmede in Σ' de kromme C′ overeenkomt, dan zullen alleen in die punten P van C raaklijn en normaal overeenstemmen met raaklijn en normaal in de homologe punten P′ van C′, in welke C wordt aangeraakt door een der confocale kegelsneden van Σ, die de brandpunten van dit stelsel tot brandpunten hebben.

Het kromtecentrum, behoorende bij een punt P van C zal alleen dan overeenstemmen met het kromtecentrum, behoorende bij het homologe punt P′ van Σ', wanneer de kromme C in P eene aanraking van de tweede orde heeft met een dier confocale kegelsneden.

Die confocale kegelsneden zijn dus de eenige krommen C, welke de eigenschap bezitten dat met hun ontwondenen de ontwondenen der homologe kromme C′ overeenstemmen.

In 't voorgaande is ondersteld, dat de beide collineaire vlakke stelsels Σ en Σ' niet affien, noch gelijkvormig zijn. Is dat het geval, dan toont men langs zeer eenvoudigen weg aan, dat krommen met de in de vraag genoemde eigenschap niet voorkomen.

Stelkundige oplossing *van* Dr. P. Zeeman Gz.

1. De rechthoekige coördinaten van een punt in 't stelsel Σ worden door x en y, die van het overeenstemmende punt van Σ' ten opzichte van andere assen door X en Y aangewezen. Dan bestaan, omdat de beide stelsels collineair zijn, tusschen deze coördinaten betrekkingen van den vorm

$$X = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3}, \quad Y = \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3} \quad \ldots \; 1)$$

waarin α_k, β_k en γ_k constanten zijn.

Hierin is $\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0$ de vergelijking van die rechte in 't stelsel Σ, die met de rechte in 't oneindige van het stelsel Σ' overeenstemt.

Evenzoo vindt men, door de vergelijking 1) naar x en y op te lossen, dat

$$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,X + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\,Y + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = 0$$

de vergelijking is van die rechte in Σ', waarmee de rechte in 't oneindige van Σ overeenstemt.

Door in beide stelsels de coördinaatassen niet geheel willekeurig aan te nemen, doch daaraan bijzondere standen te geven, kan men de betrekkingen 1) door eenvoudiger betrekkingen vervangen. Laat men toch de x-as in Σ, de X-as in Σ_1 achtereenvolgens samenvallen met die rechte van het stelsel, die met de rechte in 't oneindige van 't andere stelsel overeenkomt, dan moet $\alpha_3 = 0$, $\gamma_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$ zijn, terwijl $\beta_3 = 1$ kan worden genomen. De betrekkingen 1) worden daardoor van den vorm

$$X = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{y}, \quad Y = \frac{\gamma_2}{y}.$$

Verschuift men in Σ de y as tot de oorsprong in 't punt $\left(-\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, 0\right)$ en evenzoo in Σ' de Y-as tot de oorsprong in het punt $(\beta, 0)$ valt, hetgeen neerkomt op de vervanging van x en X door $\left(x - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)$ en $(X + \beta)$, dan gaan de betrekkingen 1) over in

$$X = \frac{\alpha_1 x}{y}, \; Y = \frac{\gamma_2}{y},$$

welke wij nog kunnen vervangen door

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{ax}{y}, \quad Y = \frac{ab}{y}; \\ x &= \frac{bX}{Y}, \quad y = \frac{ab}{Y}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; 2)$$

2. Met de rechte $y - y_1 = m(x - x_1)$ in Σ, welke door het punt (x_1, y_1) gaat, komt dus in Σ' overeen de rechte

$$\frac{ab}{Y} - y_1 = m\left(\frac{bX}{y} - x_1\right),$$

of

$$(mx_1 - y_1)\,Y = mbX - ab,$$

welke tot richtingscoëfficient heeft $\dfrac{mb}{mx_1 - y_1}$.

Brengt men dus door het punt (x_1, y_1) twee rechten, die onderling loodrecht zijn en de richtingscoëfficienten m en $-\dfrac{1}{m}$ hebben, dan zullen de overeenstemmende rechten van Σ', welker richtingscoëfficienten zijn

$$\frac{mb}{mx_1 - y_1} \text{ en } \frac{+\dfrac{b}{m}}{\dfrac{x_1}{m} + y_1},$$

alleen dan loodrecht op elkaâr zijn, wanneer voldaan wordt aan

$$\frac{mb^2}{(mx_1 - y_1)(x_1 + my_1)} = -1, \text{ of aan}$$

$$x_1y_1m^2 + (x_1^2 - y_1^2 + b^2)\,m - x_1y_1 = 0. \quad . \quad . \quad . \; 3)$$

Hieruit volgt o. a.:

1e. Elk punt (x_1, y_1) van Σ is hoekpunt van slechts één rechten hoek, waarmede in Σ' weder een rechte hoek overeenstemt. De richtingscoëfficienten der beenen van dien hoek zijn de wortels der vierkantsvergelijking 3).

2e. In Σ komen vier punten voor, die hoekpunten zijn van ∞^1 rechte hoeken, waarmede in Σ' weder rechte hoeken overeenstemmen. De coördinaten van die zoogenaamde brandpunten van Σ vindt men uit $x_1y_1 = 0$ en $x_1^2 - y_1^2 + b^2 = 0$, zij zijn dus

$$x_1 = 0,\; y_1 = \pm b \text{ en } y_1 = 0,\; x_1 = \pm b\sqrt{-1};$$

slechts twee dier punten zijn reëel. Met de reëele brandpunten $A(0, +b)$ en $B(0, -b)$ van Σ komen in Σ' overeen de reëele brandpunten $A'(0, +a)$ en $B'(0, -a)$. Elk dezer punten is centrum van een stralenbundel, waarmede in het andere stelsel een congruente stralenbundel overeenstemt.

3e. Laat men het punt (x_1, y_1) (waarvoor wij nu (x, y) schrijven) eene kromme in Σ doorloopen en nemen wij als loodrechte lijnen door dit punt de raaklijn en de normaal, dan wordt volgens 3) de voorwaarde, dat hiermede de raaklijn en de normaal der homologe kromme van Σ' overeenstemmen, verkregen door m te vervangen door $\dfrac{dy}{dx}$. Zij is derhalve

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 + b^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0. \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Deze vergelijking is de differentiaalvergelijking der krommen C in Σ, die aan de gestelde vraag voldoen. Immers, daar niet alleen de raaklijnen van C met de raaklijnen der homologe kromme C′ in Σ', doch ook de normalen dier krommen overeenstemmen, zal ook de ontwondene van C in Σ overeenstemmen met de ontwondene van C′ in Σ'.

De vergelijking 4) is de bekende differentiaalvergelijking van een stelsel confocale kegelsneden.

Haar algemeene integraal is

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1.$$

Deze vergelijking stelt voor de confocale kegelsneden, die de beide reëele brandpunten A en B van Σ tot brandpunten hebben; de homologe krommen van Σ' zijn de confocale kegelsneden, die de reëele brandpunten A′ en B′ van Σ' tot brandpunten hebben.

Vraagstuk CXXXI.

P 1 b. Welke driehoeken in Σ (zie N⁰. 130) zijn gelijkvormig met de homologe driehoeken in Σ'? (Dr. P. ZEEMAN GZ.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* Dr. P. ZEEMAN GZ.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN GZ.

Is, evenals in het voorgaande vraagstuk, l de rechte van Σ, die overeenstemt met de rechte in 't oneindige van Σ', en zijn A en B de brandpunten van Σ, A′ en B′ van Σ', dan blijkt dadelijk dat een hoek in Σ, waarvan het hoekpunt een willekeurig punt P is, terwijl de beenen de rechte l in M en N snijden, alleen dan gelijk is aan den homologen hoek in Σ', wanneer de cirkel om den driehoek MPN beschreven door een der brandpunten A of B gaat.

Immers, als die cirkel door A gaat, zullen, omdat de met M en N overeenkomende punten in 't oneindige liggen, de met MPN en MAN overeenstemmende hoeken van Σ' gelijk zijn,

omdat hun beenen evenwijdig loopen. Verder is $\angle$ MPN $=\angle$ MAN omdat zij in den cirkel MPN op gelijke bogen staan. Daar nu $\angle$ MAN gelijk is aan den homologen hoek van Σ', moet hetzelfde voor $\angle$ MPN en den daarmede overeenstemmenden hoek van Σ' gelden.

De beide beenen MP en NP van zulk een hoek zijn blijkbaar raaklijnen van een parabool, waarvan het brandpunt in A of B ligt en die bovendien de rechte l aanraakt.

Zooals men onmiddellijk inziet, is ook het omgekeerde waar, d. w. z. beschouwt men in Σ eene parabool, die A of B tot brandpunt heeft en de lijn l aanraakt, dan zal elke hoek, in Σ gevormd door twee raaklijnen dier parabool, overeenstemmen met een even grooten hoek in Σ'. Doch daaruit volgt:

Ten einde in Σ driehoeken te verkrijgen, die gelijkvormig zijn met de homologe driehoeken in Σ', beschouwt men de ∞^1 parabolen, waarvan het brandpunt samenvalt met een der brandpunten van Σ, terwijl zij de lijn l van Σ, die overeenstemt met de rechte in 't oneindige van Σ' aanraken. Elke driehoek gevormd door drie raaklijnen aan een dezer parabolen bezit de genoemde eigenschap.

Daar men ∞^1 parabolen heeft en men de raaklijnen aan een dezer parabolen willekeurig kan aannemen, om een driehoek te verkrijgen, die gelijkvormig is met den homologen driehoek in Σ', zullen er in elk der stelsels ∞^4 dergelijke driehoeken zijn.

Vraagstuk CXXXII.

N^1 1 h, R 1 c. Door elk punt P van een onveranderlijk puntenstelsel, dat zich op eene willekeurige wijze in de ruimte beweegt, brengt men de rechte, welke de richting heeft van de versnelling der n^{de} orde van P. Men vraagt een onderzoek van den complex der bedoelde rechten. (Dr. P. Zeeman Gz.)

Oplossing *van* Dr. P. Zeeman Gz.

Zijn x, y en z de coördinaten van een punt van 't stelsel ten opzichte van drie rechthoekige assen OX, OY en OZ, die een vasten stand in de ruimte innemen; ξ, η en ζ de coördinaten van ditzelfde punt ten opzichte van drie rechthoekige assen

$O_1\xi$, $O_1\eta$ en $O_1\zeta$, die een onveranderlijken stand ten opzichte van het stelsel hebben, doch zich met dit stelsel bewegen, dan bestaan tusschen die coördinaten betrekkingen van den vorm

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a\xi + a'\eta + a''\zeta \\ y &= y_0 + b\xi + b'\eta + b''\zeta \\ z &= z_0 + c\xi + c'\eta + c''\zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

of

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \\ \eta &= a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0) \\ \zeta &= a''(x - x_0) + b''(y - y_0) + c''(z - z_0). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Hier zijn x_0, y_0, z_0 de coördinaten van den oorsprong O_1 der met het stelsel verbonden assen ten opzichte van de vaste assen.

Uit 1) verkrijgt men, door $(n+1)$maal ten opzichte van t te differentieeren,

$$\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}} = \frac{d^{n+1}x_0}{dt^{n+1}} + \xi\frac{d^{n+1}a}{dt^{n+1}} + \eta\frac{d^{n+1}a'}{dt^{n+1}} + \zeta\frac{d^{n+1}a''}{dt^{n+1}}$$

en twee dergelijke formules voor $\frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}$, $\frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}$.

Vervangt men hierin ξ, η en ζ door hunne waarden uit 2) dan zal men vinden

$$\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}} = \frac{d^{n+1}x_0}{dt^{n+1}} + (x - x_0)\,\Sigma\, a\frac{d^{n+1}a}{dt^{n+1}} + (y - y_0)\,\Sigma\, b\frac{d^{n+1}a}{dt^{n+1}} +$$

$$+ (z - z_0)\,\Sigma\, c\frac{d^{n+1}a}{dt^{n+1}}.$$

Hier is

$$\Sigma\, a\frac{d^{n+1}a}{dt^{n+1}} = a\frac{d^{n+1}a}{dt^{n+1}} + a'\frac{d^{n+1}a'}{dt^{n+1}} + a''\frac{d^{n+1}a''}{dt^{n+1}}, \text{ enz.}$$

Stelt men nu, ter vereenvoudiging, $\frac{d^{n+1}x_0}{dt^{n+1}} = u$,

$$\Sigma\, a\frac{d^{n+1}a}{dt^{n+1}},\ \Sigma\, b\frac{d^{n+1}a}{dt^{n+1}},\ \Sigma\, c\frac{d^{n+1}a}{dt^{n+1}}$$

achtereenvolgens gelijk aan A_1, B_1, C_1 enz., dan verkrijgt men

voor de projecties van de versnelling der n^{de} orde op de vaste coördinaatassen, uitdrukkingen van den volgenden vorm

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}} &= u + A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0)\\ \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}} &= v + A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0)\\ \frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}} &= w + A_3(x - x_0) + B_3(y - y_0) + C_3(z - z_0)\end{aligned}\right\} \quad \ldots 3)$$

waarin, daar men het stelsel op een bepaald oogenblik beschouwt, u, v, w, $A_1 \ldots . C_3$ constanten zijn.

Beschouwt men nu elk punt (x, y, z) van het gegeven stelsel als oorsprong van een vector die in grootte en richting gelijk is aan de versnelling der n^{de} orde van dit punt, dan zullen de coördinaten x_1, y_1, z_1 van 't uiteinde van dien vector zijn

$$x_1 = x + \frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}; \quad y_1 = y + \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}; \quad z_1 = z + \frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}.$$

Vervangt men hierin $\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}$, $\frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}$ en $\frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}$ door hunne waarden uit 3) dan blijkt dat x, y, z geheele, rationale, lineaire functies van x, y, z en omgekeerd zijn; d. w. z.

Zet men van elk punt van het gegeven puntenstelsel een stuk uit, in grootte en richting gelijk aan de versnelling der n^{de} orde van dit punt, dan vormen de uiteinden dier stukken een puntenstelsel in de ruimte, dat affien verwant is met het gegeven stelsel.

De rechten, waarvan in de vraag sprake is, zijn dus de verbindingslijnen van homologe punten van twee affiene puntenstelsels in de ruimte; zij vormen dus een *tetraëdalen* complex. Zooals onmiddellijk blijkt, is van den fundamentaaltetraëder van dien complex een der zijvlakken het vlak in 't oneindige, terwijl het tegenoverstaande hoekpunt is de zoogenaamde versnellingspool der n^{de} orde van het puntenstelsel d. i. dat punt van het stelsel, waarvoor de versnelling van de n^{de} orde op het beschouwde oogenblik nul is.

Nadat de vraag reeds was opgegeven, bleek mij, dat de complex, waarvan hier sprake is, breedvoerig behandeld is door CASTELLANO in Vol. XXIX der *Atti della R. Accademia di Torino*, 1893—1894, pag. 205—223.

Het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: „*Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*," opgericht in 1779, tracht de beoefening der Wiskunde te bevorderen door

a) het houden van vergaderingen,

b) het uitgeven van tijdschriften,

c) het uitgeven van een reeks vraagstukken ter oplossing voor de leden, later gevolgd door de oplossingen,

d) het uitschrijven van prijsvragen,

e) het inrichten eener boekerij, enz.

De vergaderingen worden zooveel mogelijk maandelijks te Amsterdam gehouden, in de maanden van October tot Maart.

Het tijdschrift „*Revue semestrielle des publications mathématiques*" tracht in den kortst mogelijken tijd beknopte opgaven te verschaffen omtrent de in de verschillende wiskundige tijdschriften opgenomen verhandelingen. Het verschijnt jaarlijks in twee stukken, ieder van ruim honderd bladzijden.

Het tijdschrift getiteld „*Nieuw Archief voor Wiskunde*" geredigeerd door Dr. J. C. Kluyver te Leiden, Dr. D. J. Korteweg te Amsterdam en Dr. P. H. Schoute te Groningen bevat wiskundige verhandelingen. Elke twee jaar verschijnt een deel, bestaande uit vier stukken van ongeveer vijf vel druks.

De voornaamste der door de leden ingezonden oplossingen van de voorgestelde vraagstukken worden gepubliceerd in de „*Wiskundige Opgaven*," geredigeerd door Dr. J. De Vries te Utrecht. Elk deel bevat de oplossingen van 200 vraagstukken in ruim 400 bladzijden; het verschijnt in twee of drie jaar en bij stukken van ongeveer vier vel druks.

Jaarlijks wordt door het Genootschap een twaalftal prijsvragen uitgeschreven. Zij, die na verloop van tijd tien prijsvragen hebben beantwoord, verkrijgen den titel van lid van verdienste.

De bibliotheek, waarvan de boeken op aanvraag bij Dr. C. P. Burger, bibliothecaris van de Universiteits-bibliotheek te Amsterdam, aan de leden worden verzonden, is op de hoogte van den tijd, daar het Genootschap in ruiling is met de voornaamste wiskundige genootschappen in het buitenland.

De *jaarlijksche contributie* van de leden der Vereeniging bedraagt *f* 5,00 (entrée *f* 1,00).

Zij, die nog geen lid zijn en mochten verlangen lid te worden, gelieven zich aan te melden bij den Ondervoorzitter, Dr. D. Collingh, Van Breestraat 143, Amsterdam.

Sci 900.2.

WISKUNDIGE OPGAVEN

MET DE

OPLOSSINGEN

DOOR DE

LEDEN VAN HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP

TER SPREUKE VOERENDE

„Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"

N. S. 5.

NIEUWE REEKS.
ACHTSTE DEEL.
(1899 — 1902).

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1903.

Ter bevordering eener geregelde toezending van de drukwerken van het Genootschap worden de leden beleefd verzocht bij verhuizing hun nieuw adres op te geven aan Dr. D. COELINGH, Ondervoorzitter van het Genootschap, Amsterdam, Van Baanstraat 143.

De volgende vroeger verschenen uitgaven zijn tegen de daarbij aangegeven prijzen te ontbieden bij den Ondervoorzitter, Dr. D. COELINGH, Amsterdam, Van Breestraat 143, bij wien men ook klachten inbrengen kan over eventueele onregelmatigheden in de toezending der uitgaven van het Genootschap.

Feestgave van het Wiskundig Genootschap ter gelegenheid van zijn honderdjarig bestaan, bevattende de herdruk van twee zeldzame, merkwaardige Hollandsche werken [(Corte onderrichtinghe dienende tot het maecken vande reductien van de tacxcustingen tot gereede penningen, om dien-volgende te eysschen en ontfangen den veertichsten penning op alle vercochte of vervreemde onroerende goeden, volgende tplacaet der Heeren Staten van den XXII Decembris 1598) en (Waerdye van Lyf-renten naer proportie van Los-renten, geteekend JOHAN DE WITT, 1671)]
in den handel *f* 6,00 . . . . . voor de leden *f* 3,00.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het Wiskundig Genootschap, Amsterdam, 1885
in den handel *f* 3,00 . . . . voor de leden *f* 1,50.

Grondslag van een bibliographisch repertorium der wiskundige wetenschappen (naar den franschen tekst bewerkt), Amsterdam, 1892
in den handel *f* 2,00 . . . . voor de leden *f* 1,00.

Voordrachten over den Grondslag, per vel
in den handel *f* 0,30 . . . . voor de leden *f* 0,15.

Nieuw Archief voor Wiskunde, eerste reeks, twintig deelen tweede reeks, deel 1 en 2, per deel
in den handel *f* 4,00 . . . . voor de leden *f* 2,00.
(De volgende deelen per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,50 . . . . voor de leden *f* 0,75).

Wiskundige Opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, deel 1—8 per deel
in den handel *f* 6,00 . . . . voor de leden *f* 3,00.
en per overcompleete aflevering
in den handel *f* 1,00 . . . . voor de leden *f* 0,50.

Revue semestrielle des publications mathématiques, deel 1—10, van elk twee stukken à *f* 4,00 en bij overcompleete stukken, per stuk *f* 2,00.

Tables des matières des volumes I—V . . . . *f* 2,00.
" " " " " VI—X . . . . *f* 3,00.

Vraagstuk CXXXIII.

K 1 c. Van driehoek ABC zijn D, E, F de middens der zijden; $A_1B_1C_1$ is de eerste driehoek van BROCARD, K het punt van LEMOINE, K′ en K″ het paar isobarisch aan K toegevoegde punten. Op DA_1, EB_1, FC_1 neemt men de punten A′, B′, C′ zoo aan, dat DA′, EB′, FC′ achtereenvolgens het drievoud zijn van DA_1, EB_1, FC_1. Aan te toonen, dat de zes rechten, die door A_1, B_1, C_1, K, K′, K″ achtereenvolgens evenwijdig getrokken worden met AA′, CC′, BB′, AD, BE, CF, elkaar in één punt snijden.

(Dr. H. VAN AUBEL.)

Oplossing *van* Dr. H. VAN AUBEL.

De punten K, K′ en K″ hebben tot barycentrische coördinaten

$$(a^2,\ b^2,\ c^2),\ (b^2,\ c^2,\ a^2),\ (c^2,\ a^2,\ b^2).$$

De rechten, welke door deze punten achtereenvolgens evenwijdig met AD, BE en CF loopen, worden derhalve aangewezen door

$$(a^2+b^2+c^2)(\beta-\gamma)-(b^2-c^2)(\alpha+\beta+\gamma)=0,$$
$$(a^2+b^2+c^2)(\gamma-\alpha)-(a^2-b^2)(\alpha+\beta+\gamma)=0,$$
$$(a^2+b^2+c^2)(\alpha-\beta)-(c^2-a^2)(\alpha+\beta+\gamma)=0.$$

Daar de som der linker leden dezer vergelijkingen gelijk is aan nul, gaan de overeenkomstige rechten door een punt M. Een eenvoudige berekening doet zien, dat M bepaald is door

$$(2b^2+2c^2-a^2,\ 2a^2+2b^2-c^2,\ 2c^2+2a^2-b^2).$$

Vermeerdert men deze coördinaten met $3a^2$, $3c^2$ en $3b^2$, welke grootheden evenredig zijn met de coördinaten van A_1, dan vindt men drie gelijke grootheden, welke het zwaartepunt G der driehoeken ABC en $A_1B_1C_1$ aanwijzen. Bijgevolg liggen M en A_1 symmetrisch ten opzichte van G.

Uit $DA_1 : DA' = DG : DA = 1 : 3$ volgt verder, dat A_1G evenwijdig is met A′A. Evenzoo zijn C_1G en B_1G evenwijdig met CC′ en BB′. Derhalve zijn de rechten door B_1 en C_1 evenwijdig getrokken met CC′ en BB′, achtereenvolgens evenwijdig met de medianen C_1G en B_1G van $A_1B_1C_1$. Zij snijden derhalve A_1G in een punt, dat met betrekking tot G symmetrisch is met A_1, d. w. z. in het boven gevonden punt M.

Vraagstuk CXXXIV.

R 2 b γ. Een lichaam is met massa gevuld, waarvan de dichtheid aan het oppervlak nul is en naar binnen zoodanig toeneemt dat zij voor elk punt Q evenredig is met het stuk, dat door het oppervlak en Q wordt afgesneden van de rechte, die Q met het vaste punt P verbindt. Wanneer de dichtheid in P gelijk is aan d, vraagt men de massa en de plaats van het zwaartepunt van het lichaam te bepalen. (J. A. BARRAU.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Dr. W. BOUWMAN, J. A. KERKHOVEN *en* Dr. A. VAN THIJN.

Oplossing *van* Dr. A. VAN THIJN.

Zij dS een element van het oppervlak S van het lichaam, R de lengte van de rechte, die het element met P verbindt, Q een punt op deze rechte gelegen, en stellen wij ten slotte $PQ = r$, dan is de dichtheid bij Q gelijk aan $\frac{(R-r)d}{R}$. De massa M wordt nu gevonden uit

$$M = \iint \frac{(R-r)d}{R} \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot \cos(R, N)\, dS\, dr.$$

Hierin stelt (R, N) den hoek tusschen het verlengde van R en de naar buiten gerichte normaal voor; de integratie naar r heeft 0 en R tot grenzen. Stellen wij nu $r = \mu R$, dan gaat de integraal over in

$$d \int_0^1 \mu^2 (1-\mu)\, d\mu \int R \cos(R, N)\, dS.$$

Derhalve is

$$M = \tfrac{1}{12}\, d \int R \cos(R, N)\, dS.$$

Was de ruimte binnen S gevuld met een massa M′ van *constante* dichtheid d, dan had men

$$M' = d \int_0^1 \mu^2 d\mu \int R \cos(R, N)\, dS = \tfrac{1}{3}\, d \int R \cos(R, N)\, dS.$$

Dientengevolge is

$$M = \tfrac{1}{4} M'.$$

Om de coördinaten van de zwaartepunten Z en Z′ der lichamen M en M′ te bepalen, nemen wij P als oorsprong. Stellen wij de abscis van een punt van dS door x voor, dan is μx de abscis van Q, en de abscissen X en X′ der zwaartepunten zijn te bepalen uit

$$MX = d\int_0^1 \mu^3(1-\mu)\,d\mu \int xR\cos(N,R)\,dS$$

$$= \tfrac{1}{20}\,d\int xR\cos(N,R)\,dS,$$

$$M'X' = d\int_0^1 \mu^3 d\mu \int xR\cos(N,R)dS = \tfrac{1}{4}d\int xR\cos(N,R)dS.$$

Hieruit volgt $MX = \frac{1}{5}M'X'$, en daar $M = \frac{1}{4}M'$ is, heeft men $X = \frac{4}{5}X'$. Dus ligt Z op de rechte PZ′ en is $PZ : PZ' = 4 : 5$.

Oplossing *van* J. A. Barrau.

Maakt men gebruik van de voorstelling eener ruimte met vier afmetingen, dan kan men in elk punt van het lichaam de dichtheid uitzetten als eene ordinaat loodrecht op de ruimte R_3, waarin het lichaam ligt. In elk punt eener verbindingslijn van P met een punt A der oppervlakte van het lichaam is die ordinaat dan evenredig met den afstand van haar voetpunt tot A; haar uiteinde ligt dus in de rechte, die A verbindt met het punt P_1, dat de hoogte d boven P heeft.

Er ontstaat dan een vierdimensionale kegel met P_1 tot top en het gegeven lichaam tot richtlichaam.

Op eene wijze, volkomen overeenkomende met de gewone redeneering in de stereometrie bewijst men nu

Inhoud vierdim. kegel = grondlichaam × $\frac{1}{4}$ hoogte.

Hier is dus

Massa = inhoud × $\frac{1}{4}\,d$,

Het punt van gemiddelden afstand van den vierdimensionalen kegel ligt op $\frac{1}{5}$ der lijn, die den top met het punt Z′ van gemiddelden afstand van het grondlichaam verbindt.

Door projectie op R_3 volgt hieruit, dat het zwaartepunt Z van het lichaam gelegen is op PZ′, zoodat $ZZ' = \frac{1}{5}PZ'$.

Vraagstuk CXXXV.

R 1 b. Een vlakke figuur beweegt zich in haar eigen vlak. Van drie punten kent men de *grootte* der snelheid. Hoe construeert men grootte en richting der snelheid van een willekeurig punt der figuur?

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Dr. W. BOUWMAN, J. CARDINAAL, J. C. DE MASIER, Dr. C. STOLP, Dr. A. VAN THIJN, F. J. VAES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing.

Is O de pool der beweging, dan verhouden de snelheden van de punten A en B zich als de afstanden OA en OB. Dus ligt O op den cirkel, die de meetkundige plaats is van de punten X, waarvoor XA en XB zich verhouden als de gegeven snelheden v_A en v_B van A en B.

Een tweeden cirkel vindt men door middel van B en C en hun snelheden.

Er kunnen dus twee punten O bestaan. Een daarvan ligt in het oneindige, wanneer de drie gegeven snelheden even groot zijn; het andere is dan het middelpunt van cirkel ABC.

Heeft men O bepaald, dan is de snelheid van eenig punt P loodrecht op OP gericht, terwijl men heeft

$$v_P : v_A = OP : OA.$$

OPMERKING. Zooals bekend is, kan geen der producten $AO \times BC$, $BO \times CA$, $CO \times AB$ grooter zijn dan de som der andere twee; is een der producten gelijk aan de som der andere twee, dan liggen de vier punten op een cirkel. Hieruit blijkt, hoe de bestaanbaarheid der beide polen afhangt van de producten av_A, bv_B, cv_C.

Daar de polen door cirkel ABC harmonisch gescheiden worden, zullen ze voor $av_A = bv_B + cv_C$ op dezen cirkel samenvallen. (C.S.).

Vraagstuk CXXXVI.

L² 2 d. Door den top van een quadratisch kegelvlak trekt men de rechte lijnen, die elk de doorsnede zijn van twee loodrechte raakvlakken. Bepaal de meetkundige plaats dier rechten.

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, J. CARDINAAL, J. F. VAN OSS, Dr. A. TOXOPEUS *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Door de rechte

$$x : u = y : v = z : w$$

brengen we een vlak

$$z = Ax + By.$$

Zal dit vlak het kegelvlak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

aanraken, dan moet voldaan zijn aan de voorwaarde

$$A^2a^2 + B^2b^2 = c^2.$$

Tevens is dan

$$Au + Bv = w.$$

Uit de laatste twee vergelijkingen vindt men

$$(a^2v^2 + b^2u^2)\,A^2 - 2b^2uwA + (b^2w^2 - c^2v^2) = 0,$$
$$(a^2v^2 + b^2u^2)\,B^2 - 2a^2vwB + (a^2w^2 - c^2u^2) = 0.$$

Nu zullen de beide door de rechte (u, v, w) gelegde raakvlakken

$$z = A_1x + B_1y \quad \text{en} \quad z = A_2x + B_2y$$

loodrecht op elkaar staan, als voldaan is aan de voorwaarde

$$A_1A_2 + B_1B_2 + 1 = 0,$$

dus aan

$$\frac{b^2w^2 - c^2v^2}{a^2v^2 + b^2u^2} + \frac{a^2w^2 - c^2u^2}{a^2v^2 + b^2u^2} + 1 = 0.$$

De gevraagde meetkundige plaats wordt derhalve voorgesteld door

$$(b^2 - c^2)\,x^2 + (a^2 - c^2)\,y^2 + (a^2 + b^2)\,z^2 = 0.$$

Zij is dus een quadratisch kegelvlak, het samenstel van twee vlakken of een onbestaanbare figuur.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

Wanneer de rechte l, voorgesteld door

$$x : u = y : v = z : w,$$

de doorsnede is van twee onderling loodrechte raakvlakken van het kegelvlak

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0,$$

dan zal het vlak

$$ux + vy + wz = 0$$

den supplementairen normalenkegel

$$F(x, y, z) \equiv A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{23}yz + 2A_{31}zx = 0$$

volgens twee onderling loodrechte ribben l' en l'' snijden.

Alle quadratische kegels door l' en l'' hebben nu vergelijkingen van den vorm

$$F(x, y, z) + (ux + vy + wz)(u'x + v'y + w'z) = 0.$$

Bevat zulk een kegel de rechte l, zoodat men heeft

$$F(u, v, w) + (u^2 + v^2 + w^2)(uu' + vv' + ww') = 0,$$

dan is hij *gelijkzijdig*. De som der coëfficienten van x^2, y^2, z^2 moet dan gelijk zijn aan nul; dan is dus tevens voldaan aan de voorwaarde

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} + uu' + vv' + ww' = 0.$$

Uit de laatste twee betrekkingen vindt men de voorwaarde

$$F(u, v, w) = (A_{11} + A_{22} + A_{33})(u^2 + v^2 + w^2).$$

De meetkundige plaats van l wordt bijgevolg voorgesteld door

$$(A_{22}+A_{33})x^2 + (A_{33}+A_{11})y^2 + (A_{11}+A_{22})z^2 = 2A_{12}xy + 2A_{23}yz + 2A_{31}zx.$$

OPMERKING. Laat α een raakvlak van den gegeven kegel wezen, a de normaal van α opgericht in den top. Door a gaan twee raakvlakken β en γ, die α in twee rechten der bedoelde meetkundige plaats snijden; deze is dus in het algemeen een quadratisch kegelvlak. (W. B.)

Vraagstuk CXXXVII.

L^2 21 b. Te bewijzen, dat men door de snijkromme van een bol en een hyperbolische paraboloïde één orthogonale hyperboloïde kan leggen. Hoe construeert men deze hyperboloïde, als van elke regelschaar der paraboloïde twee rechten bekend zijn?

(J. CARDINAAL.)

Oplossing *van* J. CARDINAAL.

I. Zij de vergelijking van den bol

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0,$$

en die der paraboloïde

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2x=0,$$

dan is de vergelijking van een willekeurig quadratisch oppervlak, behoorende tot den door deze oppervlakken bepaalden bundel,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2+\lambda\left(\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2x\right)=0,$$

welke, bij ontwikkeling, geeft

$$x^2+y^2\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)+z^2\left(1-\frac{\lambda}{q}\right)+\ldots=0.$$

Daar de termen in xy, xz, yz ontbreken, geeft de voorwaarde voor de orthogonale hyperboloïde

$$a)\qquad 1+1+\frac{\lambda}{p}=1-\frac{\lambda}{q},\quad \lambda=-\frac{pq}{p+q};$$

$$b)\qquad 1+1-\frac{\lambda}{q}=1+\frac{\lambda}{p},\quad \lambda=\frac{pq}{p+q};$$

$$c)\qquad 1+\frac{\lambda}{p}+1-\frac{\lambda}{q}=1,\quad \lambda=\frac{pq}{p-q}.$$

Slechts de laatste dezer drie betrekkingen geeft een bestaanbare orthogonale hyperboloïde, met de vergelijking

$$(p-q)x^2+py^2-qz^2+\ldots\ldots=0.$$

II. Eene orthogonale hyperboloïde snijdt het vlak in het oneindige volgens eene kegelsnede K^2, die met den imaginairen bolcirkel I^2 vier punten gemeen heeft. Bepaalt men de polen van de verbindingslijnen dezer punten ten opzichte van I^2, dan moet een paar bij twee overstaande verbindingslijnen behoorende polen op K^2 liggen.

In het gegeven voorbeeld moet K^2 geconstrueerd worden met behulp van de snijpunten van I^2 met het bestaanbaar paar rechte lijnen, die de doorsnede der paraboloïde met het vlak in het oneindige voorstellen. Deze twee rechten zijn de eenige

bestaanbare verbindingslijnen, waarvan men de polen ten opzichte van I^2 bepalen kan; er is dus slechts eene orthogonale hyperboloïde mogelijk.

Hieruit volgt nu de constructie. Bij de acht punten, gegeven door de snijpunten van de vier gegeven rechten der paraboloïde met den bol, bepaalt men op de volgende wijze nog twee punten in het oneindige.

Men construeert de beide richtvlakken der paraboloïde en trekt op elk dezer eene loodlijn, dan zijn de richtingen van twee punten in het oneindige der hyperboloïde bepaald. Nu legt men door een der gegeven rechten een vlak α evenwijdig aan de richting van een dezer punten en bepaalt in α de tweede rechte der paraboloïde en de doorsnijding met den bol; dan is in α eene kegelsnede bepaald door vier punten en eene asymptotische richting. Deze kegelsnede behoort tot de orthogonale hyperboloïde, die nu verder zonder bezwaar kan worden geconstrueerd.

Vraagstuk CXXXVIII.

M² 41 δ. Van een omwentelingscylinder ligt de as in het vlak van den keelcirkel van een ringoppervlak (torus). De straal van den cylinder is even groot als de straal van den meridiaancirkel van den ring. Te bewijzen, dat de doorsnede dier oppervlakken uit twee spherische ruimtekrommen van den vierden graad is samengesteld.

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, J. CARDINAAL, Dr. C. STOLP, Dr. A. TOXOPEUS *en* B. J. VAN TROTSENBURG.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP EN B. J. VAN TROTSENBURG.

Wij nemen het vlak van den keelcirkel tot XY-vlak, de omwentelingsas van den ring tot Z-as en de Y-as evenwijdig aan de as van den cylinder.

Stelt r den afstand van een punt tot de Z-as voor, dan heeft de ring tot vergelijking

$$(r - a)^2 + z^2 = c^2,$$

en de cylinder

$$(x - b)^2 + z^2 = c^2.$$

Uit deze vergelijkingen volgt voor de punten der doorsnede de betrekking

$$r = a \pm (x - b).$$

Schrijft men de vergelijking van den ring in den vorm

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ar + a^2 - c^2 = 0,$$

en vervangt daarin r door de zooeven gevonden uitdrukking, dan blijken de punten der doorsnede ook te voldoen aan de betrekking

$$x^2 + y^2 + z^2 \mp 2a(x - b) - a^2 - c^2 = 0,$$

d. w. z. de snijkromme bestaat uit twee deelen, die achtereenvolgens op de bollen

$$(x \mp a)^2 + y^2 + z^2 = 2a^2 \mp 2ab + c^2$$

liggen.

Oplossing *van* J. CARDINAAL.

De doorsnede projecteert zich op het vlak van den keelcirkel als een biquadratische kromme.

De cylinder raakt den ring in vier eindige punten en bovendien in twee op den imaginairen bolcirkel in het oneindige gelegen punten. Dus heeft de snijkromme vier dubbelpunten en twee imaginaire dubbelknoopen. Haar projectie op het vlak van den keelcirkel bezit derhalve twee dubbelpunten en een oneindig ver gelegen dubbelknoop; ze bestaat bijgevolg uit twee parabolen met dezelfde as.

De doorsnede valt uiteen in twee biquadratische ruimtekrommen, die ieder den imaginairen bolcirkel tweemaal raken, dus spherische krommen zijn.

Vraagstuk CXXXIX.

L² 2 e. Een wijnglas, dat den vorm heeft van een omwentelingskegel, is geheel gevuld. Waar moet men een merk aanbrengen, opdat iemand, die het voor de helft wil ledigen, onder het drinken kan zien, hoe ver hij mag gaan? (Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, J. A. BARRAU, Dr. W. BOUWMAN, Dr. W. KAPTEYN, J. A. KERKHOVEN, W. MANTEL, J. C. DE MASIER, Dr. C. STOLP, Dr. A. VAN THIJN *en* B. J. VAN TROTSENBURG.

Oplossing *van* J. C. DE MASIER *en* Dr. A. VAN THIJN.

Op het oogenblik dat het glas voor de helft geledigd is, snijdt het vlak van den vloeistofspiegel het kegelvlak volgens een ellips met groote as CD. Het punt D op de beschrijvende lijn AB (A is de top) levert dan het gevraagde merk, dat doelmatiger wordt vervangen door den op het kegelvlak aangebrachten cirkel met middellijn DE.

Door het middelpunt M der ellips brengen we een vlak loodrecht op de as, dat de beschrijvende lijnen AB en AC in F en G snijdt. Nu is de halve kleine as der ellips, als halve koorde van cirkel FG, middenevenredig tusschen FM en MG, dus gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{BC \times DE}$.

De inhoud van den vloeistofkegel wordt uitgedrukt door $\frac{\pi}{3} h \,.\, \frac{1}{4} DC \sqrt{BC \times DE}$, waar h de afstand van A tot CD is; dus ook door $\frac{\pi}{6} \Delta ACD \,.\, \sqrt{BC \times DE}$.

Voor den inhoud van het wijnglas vinden we op overeenkomstige wijze $\frac{\pi}{6} \Delta ABC \,.\, BC$.

We hebben dus de voorwaarde

$$\frac{\Delta ACD}{\Delta ABC} \cdot \sqrt{\frac{DE}{BC}} = \frac{1}{2}.$$

Derhalve is

$$\frac{AD}{AB} \sqrt{\frac{AD}{AB}} = \frac{1}{2}$$

of

$$AD = AB : \sqrt[3]{4}.$$

OPMERKING *van* Dr. C. STOLP.

Het vraagstuk wordt gemakkelijk opgelost met behulp van de volgende eigenschap: De tweede machten der inhouden van twee kegels, die door twee platte vlakken van een omwentelingskegel worden afgesneden, verhouden zich als de derde machten hunner hoofddoorsneden. Het bewijs wordt eenvoudig als men in elken kegel een bol beschrijft en de stelling van DANDELIN toepast.

Vraagstuk CXL.

H 9 b. Men vraagt de partieele differentiaalvergelijking

$$2zr - 2z^2t - 3p^2 - z^2q^2 = 0$$

te herleiden tot de gedaante

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

(Dr. W. Kapteyn.)

Oplossing *van* Dr. W. Kapteyn.

De beide stelsels van karakteristieken zijn hier

$$\begin{cases} dz - pdx - qdy = 0, \\ dy + zdx = 0, \\ dp + zdq - \dfrac{3p^2 + z^2q^2}{2z} dx = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} dz - pdx - qdy = 0, \\ dy - zdx = 0, \\ dp - zdq - \dfrac{3p^2 + z^2q^2}{2z} dx = 0. \end{cases}$$

Uit het eerste stelsel volgt:

$$p(dz - pdx - qdy) + pq\,(dy + zdx) -$$
$$- z\,(dp + zdq - \frac{3p^2 + z^2q^2}{2z} dx) = 0,$$

d.i. $$\tfrac{1}{2}(p + qz)^2\, dx + pdz - zdp - z^2dq = 0$$

of

$$\frac{dx}{2} + \frac{pdz - zdp - z^2dq}{(p + qz)^2} = 0,$$

zoodat

$$u = \frac{x}{2} + \frac{z}{p + qz} = \text{const.}$$

een integraal is van dit stelsel.

Op dezelfde wijze geeft het tweede stelsel de integraal

$$v = \frac{x}{2} + \frac{z}{p - qz} = \text{const.}$$

Wij bepalen nu een functie w, die met u en met v in involutie is.

Daarvoor wordt vereischt dat voldaan is aan

$$z\frac{\partial w}{\partial y}+qz\frac{\partial w}{\partial z}+pq\frac{\partial w}{\partial p}=0$$

en

$$2z\frac{\partial w}{\partial x}+2zp\frac{\partial w}{\partial z}+(3p^2+q^2z^2)\frac{\partial w}{\partial p}+2pq\frac{\partial w}{\partial q}=0.$$

Hieraan voldoet o. a.

$$w=\frac{z}{q}-y.$$

Wij bepalen verder twee functies ρ en σ, zoodat

$$dw-\rho du-\sigma dv=k(dz-pdx-qdy).$$

Deze zijn

$$\rho=\frac{(p+zq)^2}{2zq^2},\ \sigma=-\frac{(p-zq)^2}{2zq^2}.$$

De gevraagde herleiding wordt dus verkregen door de aanrakingstransformatie

$$x'=u=\frac{x}{2}+\frac{z}{p+qz},$$

$$y'=v=\frac{x}{2}+\frac{z}{p-qz},$$

$$z'=w=\frac{z}{q}-y,$$

$$p'=\rho=\frac{(p+zq)^2}{2zq^2},$$

$$q'=\sigma=-\frac{(p-zq)^2}{2zq^2}.$$

Om nu de herleiding op eenvoudige wijze uit te voeren, schrijven wij de vergelijkingen van het eerste stelsel eerst in den vorm

$$dz-(p-zq)\,dx=0,$$

$$dp+zdq-\frac{3p^2+z^2q^2}{2z}\,dx=0;$$

daarna in den vorm

$$p\left\{dz-(p-zq)\,dx\right\}-z\left\{dp+zdq-\frac{3p^2+z^2q^2}{2z}\right\}=0,$$

$$\frac{p^2+z^2q^2}{p-zq}\left\{dz-(p-zq)\,dx\right\}-z\left\{dp+zdq-\frac{3p^2+z^2q^2}{2z}\right\}=0.$$

Wij vinden dan gemakkelijk voor deze beide vergelijkingen

$$dx'=0,$$

$$(x'-y')\,dp'+2i\sqrt{p'q'}\;dy'=0.$$

En hieruit verkrijgen wij de vergelijking

$$(x'-y')\,s'+2i\sqrt{p'q'}=0.$$

Vraagstuk CXLI.

D 6 f. Gegeven is een gesloten oppervlak S, een punt A binnen S en een punt A′ buiten S. De afstand dier punten is a, terwijl de afstanden van een veranderlijk punt M van S tot A en A′ door r en r' worden voorgesteld. Als (r, n) en (r', n) de hoeken zijn, welke r en r' met de inwendige normaal van S vormen, geldt de betrekking

$$\iint\left(\frac{\cos(r,n)}{r^2r'}-\frac{\cos(r',n)}{rr'^2}\right)dS=\frac{4\pi}{a},$$

waar de integratie zich over het oppervlak S uitstrekt.

Men vraagt dit, voor het geval dat S een boloppervlak is, met behulp van bolfuncties te bewijzen.

(Zie deel VI, N°. 153, waar het bewijs niet algemeen is.)

(Dr. W. KAPTEYN.)

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN.

Zij l de afstand OA van het middelpunt O van den bol tot A, R de straal van den bol, $\cos \mathrm{MOA}=\cos\theta=\mu$, terwijl de coördinaten van A′ zijn ρ', θ' en ϕ', dan is

$$l^2=\mathrm{R}^2-2\,\mathrm{R}r\cos(r,n)+r^2,$$
$$\rho'^2=\mathrm{R}^2-2\,\mathrm{R}r'\cos(r',n)+r'^2,$$
$$a^2=\rho'^2-2\,\rho'l\cos(\rho',l)+l^2,$$
$$dS=-\mathrm{R}^2d\mu\,d\phi,$$

dus

$$I = \frac{R}{2}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{R^2 - l^2}{r^3 r'} - \frac{R^2 - \rho'^2}{r r'^3}\right) d\mu\, d\phi.$$

Nu is

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\sum_{0}^{\infty}\frac{l^n}{R^n} P_n(\cos\delta),\ \cos\delta = \sin\theta\ \cos\phi;$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\rho'}\sum_{0}^{\infty}\frac{R^n}{\rho'^n} P_n(\cos\gamma),\ \cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R}\,\frac{1}{R^2 - l^2}\sum_{0}^{\infty}(2n+1)\frac{l^n}{R^n} P_n(\cos\delta),$$

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{\rho'}\,\frac{1}{\rho'^2 - R^2}\sum_{0}^{\infty}(2n+1)\frac{R^n}{\rho'^n} P_n(\cos\gamma).$$

Hieruit volgt

$$\frac{R^2 - l^2}{r^3 r'} = \frac{1}{R\rho'}\sum_{0}^{\infty}\frac{R^n}{\rho'^n} P_n(\cos\gamma)\sum_{0}^{\infty}(2n+1)\frac{l^n}{R^n} P_n(\cos\delta),$$

$$-\frac{R^2 - \rho'^2}{r r'^3} = \frac{1}{R\rho'}\sum_{0}^{\infty}\frac{l^n}{R^n} P_n(\cos\delta)\sum_{0}^{\infty}(2n+1)\frac{R^n}{\rho'^n} P_n(\cos\gamma).$$

Nu is

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, P_m(\cos\delta)\, d\mu\, d\phi = 0,\ m \neq n,$$

en

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, P_n(\cos\delta)\, d\mu\, d\phi = \frac{4\pi}{2n+1} P_n(\cos\delta') =$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1} P_n(\sin\theta'\cos\phi').$$

Derhalve is

$$I = \frac{4\pi}{\rho'}\sum_{0}^{\infty}\frac{l^n}{\rho'^n} P_n(\sin\theta'\cos\phi') = \frac{4\pi}{\rho'}\sum_{0}^{\infty}\frac{l^n}{\rho'^n} P_n[\cos(\rho', l)] = \frac{4\pi}{a}.$$

Vraagstuk CXLII.

A 3 1. Men vraagt de vergelijking

$$x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

op te lossen, wanneer $e = (abd - b^2c - d^2) : (a^2 - 4c)$ is.

(W. MANTEL.)

Opgelost *door* W. MANTEL, Dr. C. STOLP *en* F. J. VAES.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

De gegeven vergelijking kan geschreven worden in den vorm

$$\left(x^3 + \frac{ax+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2-4c}{4}x^2 + \frac{ab-2d}{2}x + \frac{b^2-4e}{4}\right) = 0,$$

en de betrekking tusschen de coëfficienten in den vorm

$$\frac{b^2-4e}{ab-2d} = \frac{ab-2d}{a^2-4c}.$$

Stelt men hier de waarde van elke breuk door f voor, dan kan men de oorspronkelijke vergelijking vervangen door twee kubische vergelijkingen

$$x^3 + \frac{ax+b}{2} = \pm\frac{x+f}{2}\sqrt{a^2-4c},$$

waarin de tweede macht van x ontbreekt.

OPMERKING. Om de snijpunten te bepalen van de kubische parabool $y = x^3$ met de kegelsnede

$$y^2 + axy + cx^2 + by + dx + e = 0,$$

elimineert men y en verkrijgt dan ter bepaling van de abscissen de vergelijking van ons vraagstuk. Schrijft men nu de gegeven betrekking in de gedaante

$$\begin{vmatrix} 2 & a & b \\ a & 2c & d \\ b & d & 2e \end{vmatrix} = 0,$$

dan ziet men onmiddellijk, dat de kegelsnede uit twee rechten bestaat, zoodat bovenstaande oplossing neerkomt op de bepaling van de snijpunten der kubische parabool met iedere rechte afzonderlijk.

Oplossing *van* W. MANTEL.

Om de bijzonderheid te ontdekken, waardoor deze vergelijking oplosbaar mocht wezen, stellen wij het eerste lid gelijk aan het product

$$(x^3 + px^2 + qx + r)(x^3 - px^2 + sx + t).$$

Dan is

$$-p^2 + q + s = a, \quad ps - pq + r + t = b,$$
$$pt + qs - rp = c, \quad qt + rs = d,$$
$$rt = \frac{abd - b^2c - d^2}{a^2 - 4c}.$$

Elimineert men a, b, c, d uit deze betrekkingen, dan ontstaat eene vergelijking in p, q, r, s, t, waarvan alle termen p bevatten, zoodat $p = 0$ voldoet.

De coëfficienten q, r, s, t zijn nu bepaald door

$$q + s = a, \quad r + t = b, \quad qs = c, \quad qt + rs = d.$$

Hieruit s en t verwijderende, houdt men over

$$q^2 - aq + c = 0 \quad \text{en} \quad r = \frac{d - bq}{a - 2q}.$$

Is q gevonden; dan moet men x oplossen uit $x^3 + qx + r = 0$. De uitkomst kan in haar geheel aldus worden uitgedrukt

$$q^2 - aq + c = 0,$$
$$u^2 + \frac{d - bq}{a - 2q} u - \frac{q^3}{27} = 0,$$
$$v^3 = u,$$
$$x = v - \frac{q}{3v}.$$

Bij de berekening van u komt het er niet op aan, welken wortel men neemt; zoodoende verkrijgt men zes waarden voor x.

Vraagstuk CXLIII.

L' 5 a. Onder welke voorwaarde zullen de normalen in drie van de snijpunten van $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ elkaar in één punt snijden? (J. NEUBERG.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA *en* Dr. W. BOUWMAN.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

De voetpunten der normalen, uit het punt (x_0, y_0) tot de ellips getrokken, worden bepaald door de vergelijkingen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en

$$c^2xy + b^2y_0x - a^2x_0y = 0, \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Als nu de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}(Ax + By + C)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \\ + (A_1x + B_1y + C_1)(c^2xy + b^2y_0x - a^2x_0y) = 0\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 1)$$

$$(\lambda x + \mu y)(x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma^2) = 0 \quad . \; . \; 2)$$

identiek gelijk zijn, zoo zullen deze voetpunten op de rechte l,

$$\lambda x + \mu y = 0,$$

en op den cirkel C,

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma^2 = 0,$$

liggen. Daar nu l, als lijn door 't middelpunt der ellips, in 't algemeen slechts één der voetpunten kan bevatten, zal de cirkel C door drie voetpunten gaan. Uit de identiteit van 1) en 2) volgt nu o. m.

$$\frac{A}{a^2} = \lambda, \quad \frac{B}{b^2} = \mu,$$

$$\frac{B}{a^2} + A_1(a^2 - b^2) = \mu,$$

$$\frac{A}{b^2} + B_1(a^2 - b^2) = \lambda$$

$$C = 0,$$

of

$$\lambda = -B_1b^2, \quad \mu = A_1a^2, \quad A = -B_1a^2b^2, \quad B = A_1a^2b^2, \quad C = 0,$$

zoodat 1) en 2) kunnen vervangen worden door

$$\left.\begin{aligned}(-B_1a^2b^2x + A_1a^2b^2y)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \\ + (A_1x + B_1y + C_1)(c^2xy + b^2y_0x - a^2x_0y) = 0\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 3)$$

$$(-B_1b^2x + A_1a^2y)(x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma^2) = 0 \quad . \; . \; 4).$$

Verder vinden wij nu uit 3) en 4) als voorwaarden voor hunne identiteit

$$A_1 y_0 = 2\alpha B_1\,, \quad B_1 x_0 = 2\beta A_1\,,$$

$$C_1 c^2 - A_1 a^2 x_0 + B_1 b^2 y_0 = 2B_1 b^2 \beta - 2A_1 a^2 \alpha\,,$$

$$B_1 a^2 + C_1 y_0 = -\gamma^2 B_1\,, \quad A_1 b^2 + C_1 x_0 = -\gamma^2 A_1\,,$$

en hieruit door eliminatie van x_0, y_0, A_1, B_1, C_1 ten slotte

$$4a^2\alpha^2(b^2+\gamma^2)^2 + 4b^2\beta^2(a^2+\gamma^2)^2 = (a^2+\gamma^2)^2(b^2+\gamma^2)^2\,,$$

welke vergelijking de gevraagde voorwaarde uitdrukt.

Opmerking van den Redacteur. Beschouwt men in de gevonden betrekking de grootheden α, β en $\pm\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)}$ als rechthoekige coördinaten van een punt, dan stelt deze vergelijking het oppervlak voor, dat het tweevoudig oneindige stelsel der cirkels van Joachimsthal cyclographisch afbeeldt. Vervangt men α, β en γ achtereenvolgens door x, y en $u = \sqrt{(x^2+y^2-z^2)}$, dan stemt de gevonden vergelijking inderdaad overeen met de vergelijking welke Dr. P. H. Schoute op bl. 9 van deel VII van de *Versl. d. Kon. Akad. v. Wet.* 1899 heeft gepubliceerd.

Vraagstuk CXLIV.

K 13 c. A′, B′, C′, D′ zijn de zwaartepunten der zijvlakken van een viervlak ABCD; M is een willekeurig punt. Men verlengt de rechten MA′, MB′, MC′, MD′ met de stukken A′A″ = 2MA′, B′B″ = 2MB′, C′C″ = 2MC′, D′D″ = 2MD′. Te bewijzen, dat de vier rechten AA″, BB″, CC″, DD″ door één punt gaan.

(J. Neuberg.)

Opgelost *door* J. A. Barrau, Dr. W. Bouwman, J. F. van Oss, Dr. C. Stolp *en* B. J. van Trotsenburg.

Oplossing *van* Dr. W. Bouwman.

Uit de constructie volgt, dat A″B″ evenwijdig met A′B′ en gelijk aan het drievoud van A′B′ is.

Maar A′B′ loopt ook evenwijdig met BA, terwijl BA gelijk is aan het drievoud van A′B′.

Derhalve zijn A″B″ en BA gelijk en evenwijdig, zoodat AA″ en BB″ elkaar middendoor deelen.

Hieruit volgt terstond, dat de rechten AA″, BB″, CC″ en DD″ elkaar in een punt P snijden, terwijl de viervlakken ABCD en A″B″C″D″ bij tegenoverstand gelijk en gelijkvormig zijn, met P als gelijkvormigheidspunt.

Opmerking van J. A. Barrau. De stelling kan uitgebreid worden tot een puntenstelsel in een ruimte met een willekeurig aantal afmetingen. Men vindt dan de volgende eigenschap: Als men van een aantal punten beurtelings een punt uitzondert, telkens het zwaartepunt der overgebleven groep met een vast punt M vereenigt en daarna deze verbindingslijnen uit M in dezelfde reden verandert, dan gaan de rechten die de uiteinden der nieuwe segmenten met het overeenkomstige uitgezonderde punt verbinden, door één punt.

Vraagstuk CXLV.

K 13 c. De rechten, welke de hoekpunten van het viervlak ABCD met het willekeurige punt M verbinden, snijden de overstaande zijvlakken in A′, B′, C′, D′, Hoe construeert men M, als men weet dat het samenvalt met het zwaartepunt van de massa's α, β, γ, δ, geplaatst in A′, B′, C′, D′? (J. Neuberg.)

Oplossing *van* J. A. Barrau.

Zijn x, y, z, w de barycentrische (areale) coördinaten van M, dan hebben, in de onderstelling $\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$, de punten A′, B′, C′, D′ achtereenvolgens tot coördinaten

$$\left(0, \frac{y}{1-x}, \frac{z}{1-x}, \frac{w}{1-x}\right), \left(\frac{x}{1-y}, 0, \frac{z}{1-y}, \frac{w}{1-y}\right),$$

$$\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0, \frac{w}{1-z}\right), \left(\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w}, 0\right).$$

Zal het zwaartepunt van A′, B′, C′, D′ voor de massa's α, β, γ, δ in M vallen, dan moet voldaan worden aan

$$\left(\frac{\beta}{1-y}+\frac{\gamma}{1-z}+\frac{\delta}{1-w}\right)x = x,$$

$$\left(\frac{\alpha}{1-x}+\frac{\gamma}{1-z}+\frac{\delta}{1-w}\right)y = y,$$

$$\left(\frac{\alpha}{1-x}+\frac{\beta}{1-y}+\frac{\delta}{1-w}\right)z=z,$$

$$\left(\frac{\alpha}{1-x}+\frac{\beta}{1-y}+\frac{\gamma}{1-z}\right)w=w.$$

Onderstelt men, dat M niet in een der zijvlakken van ABCD ligt, dan wordt aan deze betrekkingen voldaan door

$$\frac{\alpha}{1-x}=\frac{\beta}{1-y}=\frac{\gamma}{1-z}=\frac{\delta}{1-w}=\tfrac{1}{3},$$

waaruit volgt

$$x=1-3\alpha,\ y=1-3\beta,\ z=1-3\gamma,\ w=1-3\delta.$$

Het punt, dat hieraan beantwoordt, is dan gemakkelijk te construeeren met behulp van vlakken evenwijdig met de zijvlakken.

Maar aan de boven gevonden betrekkingen wordt ook voldaan door te stellen

$$w=0,\qquad \frac{\beta}{1-y}+\frac{\gamma}{1-z}+\delta=1,$$

$$\frac{\alpha}{1-x}+\frac{\gamma}{1-z}+\delta=1,\qquad \frac{\alpha}{1-x}+\frac{\beta}{1-y}+\delta=1.$$

Men vindt dan het punt

$$x=\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma},\ y=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma},\ z=\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha+\beta+\gamma},\ w=0.$$

In elk zijvlak ligt dus ook een punt, dat aan de vraag voldoet.

Eindelijk ligt nog op elke ribbe een punt M. Immers de voorwaarden worden ook vervuld door

$$w=0,\ z=0,\ \frac{\beta}{1-y}+\gamma+\delta=1,\ \frac{\alpha}{1-x}+\gamma+\delta=1,$$

dus door

$$x=\frac{\beta}{\alpha+\beta},\ y=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\ z=0,\ w=0.$$

Vraagstuk CXLVI.

K 1 c. D en E zijn twee punten in het vlak van driehoek

ABC. Men vraagt een punt X te construeeren, waarvoor de dubbelverhoudingen A (DEBX), B (DECX) en C (DEAX) even groot zijn.
(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Dr. W. BOUWMAN *en* J. F. VAN OSS.

Oplossing *van* Dr. W. BOUWMAN.

De meetkundige plaats van het punt X, waarvoor A (DEBX) = B (DECX), is een kegelsnede door de punten D, E, A en B, die den straal BC aanraakt.

Evenzoo bepaalt de betrekking B (DECX) = C (DEAX) een kegelsnede door de punten D, E, B en C, die door CA wordt geraakt.

Deze kegelsneden hebben de punten D, E en B gemeen; hun vierde snijpunt is het gevraagde punt X.

Laat een door D getrokken veranderlijke straal de beide kegelsneden in P en Q ontmoeten, dan beschrijven EP en EQ blijkbaar twee projectieve stralenbundels. Een der dubbelstralen van deze collocale bundels gaat door B, de tweede bevat het punt X, dat dan gemakkelijk is te vinden, omdat de beide kegelsneden volkomen bepaald zijn.

OPMERKING. Zijn D en E de cyclische punten, dan gaan de beide kegelsneden over in cirkels, en met ziet gemakkelijk dat $\angle AXB = 180° - B$ en $\angle BXC = 180° - C$ is. Bijgevolg is X dan een der punten van BROCARD. (RED.)

Vraagstuk CXLVII.

P 6 f. De rechten, welke het punt M verbinden met de hoekpunten van driehoek ABC, snijden de overstaande zijden in A′, B′, C′. Zij M′ het zwaartepunt der massa's α, β, γ geplaatst in A′, B′, C′. Onderzoek de verwantschap der punten M en M′.
(J. NEUBERG.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

1. Met een punt M komt in het algemeen een bepaald punt M′ overeen.

Ligt evenwel M in C, dan wordt C′ onbepaald, en M′ is

een willekeurig gekozen punt op de rechte m'_c, die de zijden AC en BC in reden van $\alpha + \beta$ tot γ verdeelt.

Evenzoo zijn aan A en B de rechten m'_a en m'_b toegevoegd.

Ligt M op de rechte m_c door C evenwijdig met AB getrokken, dan valt C oneindig ver en M′ wordt het oneindig ver gelegen punt van AB. Evenzoo zijn de oneindig ver gelegen punten van BC en CA toegevoegd aan de rechten m_a en m_b.

2. Een willekeurig aangenomen punt M′ is het zwaartepunt van oneindig vele drietallen A′, B′, C′. Immers, nemen we A′ willekeurig aan en bepalen op A′M′ het punt A″, waarvoor $A'M' : M'A'' = (\beta + \gamma) : \alpha$, dan kan door A″ slechts *een* rechte getrokken worden, waarvan de snijpunten C′ en B′ met AB en AC voldoen aan de voorwaarde $C'A'' : A''B' = \beta : \gamma$.

Als A′ de lijn BC doorloopt, beschrijven AA′, BB′ en CC′ drie projectieve waaiers. De kegelsneden welke door deze drie stralenbundels, twee aan twee genomen, worden voortgebracht, hebben drie punten gemeen; dus behoort M′ bij *drie* punten M.

3. Wanneer M′ een rechte lijn l' doorloopt, verplaatst M zich over een kubische kromme, die door A, B en C gaat. Immers het snijpunt van l' met AB behoort bij een zeker punt M van AB, terwijl de snijpunten van l' met de bovengenoemde rechten m'_a en m'_b aan de punten A en B zijn toegevoegd; de meetkundige plaats van M heeft dus drie punten met AB gemeen.

Valt l' met AB samen, dan is de meetkundige plaats van M′ samengesteld uit drie rechten; een daarvan is natuurlijk AB, de tweede de lijn m_c, die met het oneindig ver gelegen punt van AB overeenkomt.

4. Als M een rechte l beschrijft, doorloopt M′ eveneens een kubische kromme; haar snijpunten M′ met de willekeurig gekozen rechte s' komen blijkbaar overeen met de drie punten, welke l gemeen heeft met de aan s' toegevoegde kubische kromme.

Dit wordt nog bevestigd door de opmerking dat de aan l toegewezen kromme slechts drie punten in het oneindige kan hebben, n.l. de oneindig ver gelegen punten van AB, BC en CA, overeenkomende met de punten, waarin de rechten m_c, m_a en m_b door l worden gesneden.

5. Worden de areale coördinaten van M door x, y, z

aangewezen, en stelt men $x+y+z=1$ en $\alpha+\beta+\gamma=1$, dan zijn de coördinaten van M'

$$x'=\frac{\beta x}{x+z}+\frac{\gamma x}{x+y},\ y'=\frac{\gamma y}{y+x}+\frac{\alpha y}{y+z},\ z'=\frac{\alpha z}{z+y}+\frac{\beta z}{z+x}.$$

Hieruit volgt, dat M' met M samenvalt, als men heeft

$$x=1-2\alpha,\quad y=1-2\beta,\quad z=1-2\gamma;$$
$$z=0,\quad \alpha x=\beta y,\quad \text{enz.}$$

Behalve de hierdoor aangewezen vier eindige coïncidenties van M' met M heeft de verwantschap er nog drie in het oneindige, n.l. op den omtrek van driehoek ABC.

Vraagstuk CXLVIII.

K 1 c. Op de zijden van driehoek ABC beschrijft men de rechtstreeks gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken BCA', CAB', ABC'. Vormen P, Q, R een barycentrisch drietal, en trekt men

a) de rechten door A', B', C' evenwijdig met AP, BQ, CR of met BQ, CR, AP of met CR, AP, BQ;

b) de rechten door A', B', C' loodrecht op AP, BQ, CR of op BQ, CR, AP of op CR, AP, BQ;

c) de rechten door A, B, C evenwijdig met A'P, B'Q, C'R of met A'Q, B'R, C'P of met A'R, B'P, C'Q,

dan vraagt men onder welke voorwaarden de rechten van elk dezer drietallen door één punt gaan. [1])

(Dr. A. J. A. PRANGE.)

Oplossing *van* Dr. H. VAN AUBEL.

a) Is m de cotangens van den halven tophoek der gelijkbeenige driehoeken en S de inhoud van driehoek ABC, dan zijn de barycentrische coördinaten der punten A', B', C'

$$(8S-b'-c',\ c',\ b'),\ (c',\ 8S-c'-a',\ a'),\ (b',\ a',\ 8S-a'-b'),$$

waarin $a'=4S+m(b^2+c^2-a^2)$, $b'=4S+m(c^2+a^2-b^2)$, $c'=4S+m(a^2+b^2-c^2)$ is.

---

[1]) De opgave is door Dr. VAN AUBEL geretoucheerd.

Duiden vervolgens $(\alpha', \beta', \gamma')$ de coördinaten van P aan, dan vindt men voor de door A', B', C' met AP, BQ, CR evenwijdig getrokken rechten de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}(c'\gamma' - b'\beta')(\alpha + \beta + \gamma) - 8S(\gamma'\beta - \beta'\gamma) = 0,\\ (a'\alpha' - c'\gamma')(\alpha + \beta + \gamma) - 8S(\alpha'\gamma - \gamma'\alpha) = 0,\\ (b'\beta' - a'\alpha')(\alpha + \beta + \gamma) - 8S(\beta'\alpha - \alpha'\beta) = 0,\end{aligned}\right\} \quad \ldots 1)$$

Door optelling verdwijnen α, β, γ en vindt men

$$(b' - c')\alpha' + (a' - b')\beta' + (c' - a')\gamma' = 0,$$

of, als men a', b', c' door hunne waarden vervangt,

$$(b^2 - c^2)\alpha' + (a^2 - b^2)\beta' + (c^2 - a^2)\gamma' = 0.$$

Deze vergelijking stelt de mediaan A_1G van den eersten driehoek $A_1B_1C_1$ van BROCARD voor.

Dus gaan de drie bedoelde rechten door één punt M, als P tot de mediaan A_1G behoort, d.i. *als driehoek* PQR *ten opzichte van het zwaartepunt* G *met* $A_1B_1C_1$ *homothetisch is.*

Geeft men aan de vergelijkingen 1) den vorm

$$(c's - 8S\beta)\gamma' = (b's - 8S\gamma)\beta',$$
$$(a's - 8S\gamma)\alpha' = (c's - 8S\alpha)\gamma',$$
$$(b's - 8S\alpha)\beta' = (a's - 8S\beta)\alpha',$$

waarin $s = \alpha + \beta + \gamma$ is, dan vindt men door vermenigvuldiging

$$\left.\begin{aligned}(c's - 8S\beta)(a's - 8S\gamma)(b's - 8S\alpha) -\\ (b's - 8S\gamma)(c's - 8S\alpha)(a's - 8S\beta) = 0,\end{aligned}\right\} \quad \ldots 2)$$

en hieruit, na herleiding en weglating van den gemeenen factor $8Ss$,

$$(\alpha + \beta + \gamma)[(b^2 - c^2)\alpha + (c^2 - a^2)\beta + (a^2 - b^2)\gamma] +$$
$$+ 8S[(b^2 - c^2)\beta\gamma + (c^2 - a^2)\gamma\alpha + (a^2 - b^2)\alpha\beta] = 0.$$

Uit den vorm dezer vergelijking blijkt dat *de meetkundige plaats van het punt* M, *als de homothetische verhouding der driehoeken* PQR, $A_1B_1C_1$ *verandert, eene gelijkzijdige hyperbool is, welke met die van* KIEPERT *homothetisch is en deze in de punten* $(1, 1, 1)$, $\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}\right)$ *d.i. in het zwaartepunt* G *en in het centrum van homologie der driehoeken* ABC, $A_1B_1C_1$ *snijdt.*

De in 2) tusschen haakjes geplaatste tweetermen worden nul voor de rechten door A′, B′, C′ evenwijdig met CA, AB, BC en met AB, BC, CA. Bij gevolg gaat deze hyperbool door de punten A′, B′, C′ en door de snijpunten der rechten door A′, B′, C′ evenwijdig aan CA, AB, BC met de rechten door B′, C′, A′ evenwijdig aan BC, CA, AB getrokken.

Trekt men door A′, B′, C′ rechten evenwijdig met BQ, CR, AP, dan vindt men voor deze de vergelijkingen

$$[b'\beta' - (8S - b' - c')\alpha']\,s - 8S\,(\beta'\gamma - \alpha'\alpha) = 0,$$
$$[c'\alpha' - (8S - c' - a')\gamma']\,s - 8S\,(\alpha'\alpha - \gamma'\beta) = 0,$$
$$[a'\gamma' - (8S - a' - b')\beta']\,s - 8S\,(\gamma'\beta - \beta'\gamma) = 0.$$

Door optelling verdwijnen α, β, γ en bekomt men voor de meetkundige plaats van P

$$(8S - b' - 2c')\,\alpha' + (8S - a' - 2b')\,\beta' + (8S - c' - 2a')\,\gamma' = 0,$$

of, als men a', b', c' door hunne waarden vervangt,

$$4S(\alpha'+\beta'+\gamma')+m[(3a^2+b^2-c^2)\alpha'+(3c^2+a^2-b^2)\beta'+(3b^2+c^2-a^2)\gamma']=0,$$

d. i. eene rechte die voor alle waarden van den tophoek der gelijkbeenige driehoeken evenwijdig blijft met de rechte voorgesteld door de vergelijking

$$(3a^2 + b^2 - c^2)\,\alpha' + (3c^2 + a^2 - b^2)\,\beta' + (3b^2 + c^2 - a^2)\,\gamma' = 0.$$

Evenzoo vindt men voor de meetkundige plaats van het punt P′, onder de voorwaarde dat de door A′, B′, C′ met CR, AP, BQ evenwijdig loopende rechten door één punt gaan,

$$4S(\alpha'+\beta'+\gamma')+m[(3a^2+c^2-b^2)\alpha'+(3c^2+b^2-a^2)\beta'+(3b^2+a^2-c^2)\gamma']=0.$$

b) Daar de vergelijkingen der loodlijnen uit A′, B′, C′ op AP, BQ, CR′ neergelaten tamelijk ingewikkeld zijn, maken wij, om dit gedeelte van het vraagstuk op te lossen, bij voorkeur gebruik van de methode der equipollenties.

Zijn (α', β', γ') de barycentrische coördinaten van P, en M, M′ de snijpunten der loodlijn uit A′ op AP met de loodlijnen uit B′, C′ op BQ, CR, dan heeft men de equipollenties

$$A'M = xi\,AP,\ B'M = yi\,BQ;\quad A'M' = x'i\,AP,\ C'M' = y'i\,CR;$$

waaruit men vindt

$$M = A' + xi\,(P - A) = B' + yi\,(Q - B),$$
$$M' = A' + x'i\,(P - A) = C' + y'i\,(R - C).$$

Vervangt men P, Q, R, A′, B′, C′ door hunne waarden

$$P = \frac{\alpha' A + \beta' B + \gamma' C}{\alpha' + \beta' + \gamma'}, \quad Q = \frac{\beta' A + \gamma' B + \alpha' C}{\alpha' + \beta' + \gamma'}, \quad R = \frac{\gamma' A + \alpha' B + \beta' C}{\alpha' + \beta' + \gamma'},$$

$$A' = \frac{(8S - b' - c')A + c'B + b'C}{8S}, \quad B' = \frac{c'A + (8S - c' - a')B + a'C}{8S},$$

$$C' = \frac{b'A + a'B + (8S - a' - b')C}{8S},$$

en neemt A als oorsprong, dan bekomt men

$$AM = \frac{c'AB + b'AC}{8S} + xi\,\frac{\beta'AB + \gamma'AC}{\alpha' + \beta' + \gamma'} =$$

$$= \frac{(8S - c' - a')AB + a'AC}{8S} + yi\,\frac{-(\alpha' + \beta')AB + \alpha'AC}{\alpha' + \beta' + \gamma'},$$

$$AM' = \frac{c'AB + b'AC}{8S} + x'i\,\frac{\beta'AB + \gamma'AC}{\alpha' + \beta' + \gamma'} =$$

$$= \frac{a'AB + (8S - a' - b')AC}{8S} + y'i\,\frac{\alpha'AB - (\gamma' + \alpha')AC}{\alpha' + \beta' + \gamma'},$$

of, in aanmerking nemende dat

$$AC = \frac{b}{c}\,\varepsilon^{A}AB = \frac{b}{c}(\cos A + i \sin A)AB \text{ is,}$$

$$AM = \left[\frac{cc' + bb'(\cos A + i \sin A)}{8Sc} + xi\,\frac{c\beta' + b\gamma'(\cos A + i \sin A)}{c(\alpha' + \beta' + \gamma')}\right]AB$$

$$= \left[\frac{c(8S - c' - a') + ba'(\cos A + i \sin A)}{8Sc} + \right.$$

$$\left. + yi\,\frac{-c(\alpha' + \beta') + b\alpha'(\cos A + i \sin A)}{c(\alpha' + \beta' + \gamma')}\right]AB,$$

$$AM' = \left[\frac{cc' + bb'(\cos A + i \sin A)}{8Sc} + x'i\,\frac{c\beta' + b\gamma'(\cos A + i \sin A)}{c(\alpha' + \beta' + \gamma')}\right]AB$$

$$= \left[\frac{ca' + b(8S - a' - b')(\cos A + i \sin A)}{8Sc} + \right.$$

$$\left. + y'i\,\frac{c\alpha' - b(\gamma' + \alpha')(\cos A + i \sin A)}{c(\alpha' + \beta' + \gamma')}\right]AB.$$

Door scheiding der bestaanbare en der onbestaanbare termen

geven deze equipollenties, na omzetting en gebruik der waarden van a', b', c', aanleiding tot de vergelijkingen

$$\frac{b\gamma' x \sin A - b\alpha' y \sin A}{\alpha' + \beta' + \gamma'} = \frac{4Sc + cm(a^2 + 3b^2 - c^2) + 2bm(a^2 - b^2)\cos A}{8S},$$

$$\frac{(c\beta' + b\gamma' \cos A)\, x + [c\,(\alpha' + \beta') - b\alpha' \cos A]\, y}{\alpha' + \beta' + \gamma'} = -\frac{2bm(a^2 - b^2)\sin A}{8S},$$

$$\frac{b\,\gamma' x' \sin A + b\,(\gamma' + \alpha')y' \sin A}{\alpha +' \beta' + \gamma'} =$$

$$= \frac{-2cm\,(c^2 - a^2) + [4S + m\,(3c^2 + a^2 - b^2)]\, b \cos A}{8S},$$

$$\frac{(c\beta' + b\gamma' \cos A)x' - [c\alpha' - b(\gamma' + \alpha')\cos A]\, y'}{\alpha' + \beta' + \gamma'} = -\frac{[4S + m(3c^2 + a^2 - b^2)]\, b \sin A}{8S}.$$

De punten M, M′ zullen samenvallen, wanneer de waarden van $\frac{x}{\alpha' + \beta' + \gamma'}$ en $\frac{x'}{\alpha' + \beta' + \gamma'}$ gelijk zijn. Deze waarden uit de vier vergelijkingen getrokken hebben den gemeenen noemer $16S^2(\beta'\gamma' + \gamma'\alpha' + \alpha'\beta')$. Stelt men dus hunne tellers gelijk en geeft men acht op de betrekkingen

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2, \quad 2bc \sin A = 4S,$$

$$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16S^2,$$

dan vindt men voor de meetkundige plaats van P de vergelijking

$$4Sm(\alpha' + \beta' + \gamma') + a^2\alpha' + c^2\beta' + b^2\gamma' = 0,$$

dus *eene rechte die voor elke waarde van m evenwijdig blijft met de rechte*

$$a^2\alpha' + c^2\beta' + b^2\gamma' = 0.$$

Evenzoo vindt men voor de meetkundige plaatsen van P onder de voorwaarden dat de loodlijnen uit A′, B′, C′ op BQ, CR, AP of op CR, AP, BQ door een punt M gaan:

$$4Sm(\alpha' + \beta' + \gamma') + (c^2 + a^2 - b^2)\alpha' + (b^2 + c^2 - a^2)\beta' + (a^2 + b^2 - c^2)\gamma' = 0,$$

$$4Sm(\alpha' + \beta' + \gamma') + (a^2 + b^2 - c^2)\alpha' + (c^2 + a^2 - b^2)\beta' + (b^2 + c^2 - a^2)\gamma' = 0.$$

c) Voor de rechten door A, B, C evenwijdig met A′P, B′Q, C′R getrokken, vindt men de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}(b's' - 8S\gamma')\beta - (c's' - 8S\beta')\gamma &= 0,\\ (c's' - 8S\beta')\gamma - (a's' - 8S\alpha')\alpha &= 0,\\ (a's' - 8S\alpha')\alpha - (b's' - 8S\gamma')\beta &= 0,\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; 3)$$

waarvan de som identiek nul is. Dus gaan die rechten door één punt, voor eene *willekeurige* ligging van het punt P in het vlak.

Vervangt men in 3) $(\alpha', \beta', \gamma')$ achtereenvolgens door $(\beta', \gamma', \alpha')$, $(\gamma', \alpha', \beta')$, dan bekomt men de vergelijkingen der rechten door A, B, C evenwijdig met A'Q, B'R, C'P of met A'R, B'P, C'Q, welker som ook identiek nul is; bij gevolg gaan die rechten insgelijks door één punt voor een willekeurige ligging van P in het vlak.

Opmerking. Behoort het punt $P(\alpha', \beta', \gamma')$, dus ook $Q(\beta', \gamma', \alpha')$ en $R(\gamma', \alpha', \beta')$, tot de ellips van Steiner, voorgesteld door de vergelijking $\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 0$, dan ziet men gemakkelijk dat de rechten AP, BQ, CR evenwijdig zijn, bij gevolg gaan de in de gedeelten *a*) en *b*) van het vraagstuk bedoelde rechten door één punt, in het oneindige gelegen, al zijn zelfs A', B', C' drie willekeurige punten in plaats van de toppunten van gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken op de zijden van ABC als bases beschreven. Overigens wordt zulks nog aangeduid door de waarden; in het gedeelte *b*) der oplossing, van $\frac{x}{\alpha'+\beta'+\gamma'}$ en $\frac{x'}{\alpha'+\beta'+\gamma'}$, die in dit geval gelijk maar oneindig zijn; want de gemeene noemer dezer waarden bevat den factor $\beta'\gamma' + \gamma'\alpha' + \alpha'\beta'$.

Vraagstuk CXLIX.

Q 2. Twee in een ruimte R_4 gelegen vlakken zijn bepaald door hun snijpunten (1, 2, 0, 0), (0, 3, 4, 0), (0, 0, 5, 6) en (6, 5, 0, 0), (0, 4, 3, 0), (0, 0, 2, 1) met de coördinaatvlakken $O(X_1X_2)$, $O(X_2X_3)$, $O(X_3X_4)$. Men vraagt naar de coördinaten van het snijpunt dier vlakken. (Dr. P. H. Schoute.)

Opgelost *door* J. A. Barrau, W. Mantel, Dr. P. H. Schoute *en* Dr. A. Toxopeus.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

Zijn (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4), (z_1, z_2, z_3, z_4) de coördinaten van drie willekeurig in R_4 gegeven punten P_x, P_y, P_z, dan stellen de betrekkingen

$$t_i = \frac{\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i}{\lambda + \mu + \nu}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

het in al zijn punten P_t ontbonden vlak $P_x P_y P_z$ voor. We vinden dus voor het gemeenschappelijk punt der beide gegevene vlakken

$$\frac{\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i}{\lambda + \mu + \nu} = \frac{\lambda' x'_i + \mu' y'_i + \nu' z'_i}{\lambda' + \mu' + \nu'}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

of, als we de beide noemers gelijk aan de eenheid onderstellen en de gegeven waarden invoeren, het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} &\lambda + \mu + \nu = 1, && \lambda' + \mu' + \nu' = 1, \\ &\lambda = 6\lambda', && 2\lambda + 3\mu = 5\lambda' + 4\mu', \\ &4\mu + 5\nu = 3\mu' + 2\nu', && 6\nu = \nu', \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$\lambda = \nu' = \tfrac{3}{7}, \ \mu = \mu' = \tfrac{1}{2}, \ \nu = \lambda' = \tfrac{1}{14}.$$

Dus zijn de coördinaten van het gevraagde punt

$$(\tfrac{3}{7}, 2\tfrac{5}{14}, 2\tfrac{5}{14}, \tfrac{3}{7}).$$

OPMERKING. De coördinaten van het eerste drietal gegeven punten vormen, in omgekeerde volgorde genomen, de coördinaten van het tweede drietal. Dit is oorzaak, dat voor het gevraagde punt $x_1 = x_4$ en $x_2 = x_3$ is; bovendien kan er uit afgeleid worden

$$\lambda = \nu', \quad \mu = \mu', \quad \nu = \lambda'.$$

Maakt men hiervan gebruik, dan komt voor het stelsel der zes lineaire vergelijkingen in de plaats het tweetal stelsels

$$\left.\begin{aligned} \lambda + \mu + \nu &= 1 \\ \lambda &= 6\nu \\ \mu + 5\nu &= 2\lambda \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} \lambda' + \mu' + \nu' &= 1 \\ 6\lambda' &= \nu' \\ \mu' + 5\lambda' &= 2\nu' \end{aligned}\right\},$$

enz.

Vraagstuk CL.

Q 2. Bepaal de vergelijkingen der snijlijn van de in een ruimte R_4 gelegen, met OX_1, OX_2, OX_3 evenwijdig loopende rechten $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$, $x_4 = a_4$; $x_1 = b_1$, $x_3 = b_3$, $x_4 = b_4$; $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_4 = c_4$. (Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Dr. P. H. SCHOUTE *en* Dr. A. TOXOPEUS.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

De gevraagde lijn is de doorsnee der drie ruimten (l_2, l_3), (l_3, l_1), (l_1, l_2) die door de gegeven lijnen l_1, l_2, l_3 twee aan twee genomen zijn gebracht. Deze ruimten hebben tot vergelijkingen

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_4 & 1 \\ b_1 & b_4 & 1 \\ c_1 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_2 & x_4 & 1 \\ c_2 & c_4 & 1 \\ a_2 & a_4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_3 & x_4 & 1 \\ a_3 & a_4 & 1 \\ b_3 & b_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dus zijn de gevraagde vergelijkingen

$$(b_4 - c_4)\, x_1 = (b_1 - c_1)\, x_4 + (b_4 c_1 - b_1 c_4),$$
$$(c_4 - a_4)\, x_2 = (c_2 - a_2)\, x_4 + (c_4 a_2 - c_2 a_4),$$
$$(a_4 - b_4)\, x_2 = (a_3 - b_3)\, x_4 + (a_4 b_3 - a_3 b_4).$$

Vraagstuk CLI.

Q 2. Bepaal de hoeken der beide vlakken van een ruimte R_4, welke, op rechthoekige assen, door de paren vergelijkingen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ en $x_1 = ax_3 + bx_4$, $x_2 = cx_3 + dx_4$ worden aangewezen. (Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU *en* Dr. P. H. SCHOUTE.

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

De hyperspheer met straal 1 en den oorsprong tot middelpunt heeft tot vergelijking

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Door verbinding dezer vergelijking met die van het vlak

$$x_1 = ax_3 + bx_4 \quad ; \quad x_2 = cx_3 + dx_4$$

krijgt men de vergelijking van den in dat vlak gelegen cirkel met straal 1. De coördinaten van zijn punten voldoen dus aan

$$(ax_3 + bx_4)^2 + (cx_3 + dx_4)^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

of

$$(a^2 + c^2 + 1)x_3^2 + (b^2 + d^2 + 1)x_4^2 + 2(ab + cd)x_3x_4 = 1.$$

Daar in deze vergelijking x_1 en x_2 niet voorkomen, geldt ze ook voor de projectie van dien cirkel op het vlak ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$), die in het algemeen eene ellips is. De halve assen dezer ellips zijn de cosinussen der gevraagde standhoeken, dus zijn $\cos^2\phi$ en $\cos^2\psi$ de wortels eener vierkantsvergelijking, welke voor de ellips

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + H = 0$$

de gedaante heeft

$$(AC - B^2)u^2 + (A + C)Hu + H^2 = 0.$$

In het gegeven geval vindt men dus

$$\{(a^2+c^2+1)(b^2+d^2+1)-(ab+cd)^2\}u^2-(a^2+b^2+c^2+d^2+2)u+1=0$$

of

$$\{(ad - bc)^2+a^2+b^2+c^2+d^2+1\}u^2-(a^2+b^2+c^2+d^2+2)u+1=0.$$

OPMERKING. Deze wortels zijn gelijk als de projectie een cirkel is, dus

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \quad \text{en} \quad ab + cd = 0,$$

d. w. z.

$$a = d,\ b = c \quad \text{of} \quad a = -d,\ b = c.$$

De vlakken bezitten dan oneindig vele onderling gelijke standhoeken.

Voor $ad - bc = 0$ is een der wortels 1, dus een standhoek 0°; de vlakken verkeeren in het stereometrische geval.

Voor wortels gelijk aan nul (loodrechte standen) zijn de vergelijkingen in dezen vorm ongeschikt.

Oplossing *van* Dr. P. H. SCHOUTE.

De hoek ϕ gevormd door de lijnen uit den oorsprong naar

de punten (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) wordt gegeven door de vergelijking

$$\cos\phi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)}}.$$

Is nu (x_1, x_2, x_3, x_4) een willekeurig punt $(a\lambda + b\mu, c\lambda + d\mu, \lambda, \mu)$ van het tweede vlak en (y_1, y_2, y_3, y_4) de projectie $(0, 0, \lambda, \mu)$ van dit punt op het eerste, dan wordt deze hoek ϕ dus bepaald door

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\sqrt{(a\lambda + b\mu)^2 + (c\lambda + d\mu)^2 + \lambda^2 + \mu^2}},$$

of, als we $\frac{\lambda}{\mu} = \nu$ stellen, door

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{\nu^2 + 1}}{\sqrt{(a\nu + b)^2 + (c\nu + d)^2 + \nu^2 + 1}}.$$

We bepalen de grenswaarden van ϕ langs elementairen weg door de waarden van ϕ te zoeken, waarbij ν onbestaanbaar wordt. We hebben

$$\{(a^2 + c^2 + 1)\nu^2 + 2(ab + cd)\nu + b^2 + d^2 + 1\}\cos^2\phi = \nu^2 + 1,$$

of

$$\{(a^2 + c^2 + 1)\cos^2\phi - 1\}\nu^2 + 2\{(ab + cd)\cos^2\phi\}\nu + \\ + (b^2 + d^2 + 1)\cos^2\phi - 1 = 0.$$

Dus worden de gevraagde grenswaarden bepaald door de vergelijking

$$[(a^2 + c^2 + 1)\cos^2\phi - 1][(b^2 + d^2 + 1)\cos^2\phi - 1] = (ab + cd)^2\cos^4\phi$$

d. i. door

$$(a^2 + c^2 - \operatorname{tg}^2\phi)(b^2 + d^2 - \operatorname{tg}^2\phi) = (ab + cd)^2$$

of door

$$\operatorname{tg}^4\phi - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\operatorname{tg}^2\phi + (ad - bc)^2 = 0.$$

De wortels dezer vierkantsvergelijking in $\operatorname{tg}^2\phi$ zijn altijd bestaanbaar. Want voor den vorm onder het wortelteeken vindt men bij oplossing

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 4(ad - bc)^2 \\ = \{(a + d)^2 + (b - c)^2\}\{(a - d)^2 + (b + c)^2\}.$$

Voor $a = d$, $b = -c$ of $a = -d$, $b = c$ worden de beide standhoeken aan elkaar gelijk, enz.

Vraagstuk CLII.

J 2 f. In een bak zijn n genummerde ballen. Daaruit wordt zoo dikwijls een bal getrokken en er weer ingeworpen, tot dat

a) m verschillende nummers,

b) m aangewezen nummers

getrokken zijn. In beide gevallen het gemiddeld aantal trekkingen te bepalen, ook wanneer reeds ballen getrokken waren.

(F. SCHUH.)

Oplossing *van* F. SCHUH.

Zij het gemiddeld aantal malen dat men een bal moet trekken om in het geheel m verschillende nummers getrokken te hebben, op het oogenblik dat er reeds x verschillende getrokken zijn, $f(x)$. Men trekt nu een bal die met een kans $\frac{x}{n}$ tot de reeds getrokkenen behoort, dus met een kans $\frac{n-x}{n}$ tot de nog niet getrokkenen. Volgens de regels voor het werken met gemiddelde aantallen is nu

$$f(x) = 1 + \frac{x}{n} f(x) + \frac{n-x}{n} f(x+1),$$

of

$$f(x) = \frac{n}{n-x} + f(x+1),$$

waaruit men gemakkelijk afleidt

$$f(x) = -n \left\{ \frac{1}{n-x+1} + \frac{1}{n-x+2} + \ldots + \frac{1}{n} \right\} + f(0).$$

Daar $f(m) = 0$ is, wordt

$$f(0) = n \left\{ \frac{1}{n-m+1} + \frac{1}{n-m+2} + \ldots + \frac{1}{n} \right\}, \text{ dus is}$$

$$f(x) = n \left\{ \frac{1}{n-m+1} + \frac{1}{n-m+2} + \ldots + \frac{1}{n-x-1} + \frac{1}{n-x} \right\}.$$

Stelt men $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{l} \equiv S(l)$, dan kan men ook schrijven

$$f(x) = n\,\{S(n-x) - S(n-m)\}.$$

Zij verder het gemiddeld aantal malen dat men een bal moet trekken om m bepaalde nummers te trekken, op het oogenblik dat er reeds x van die nummers getrokken zijn, $\phi(x)$, dan vind men op dezelfde wijze als boven

$$\phi(x) = 1 + \frac{x+n-m}{n}\,\phi(x) + \frac{m-x}{n}\,\phi(x+1),$$

of

$$\phi(x) = \frac{n}{m-x} + \phi(x+1),$$

waaruit men vindt

$$\phi(x) = -n\,[S(m) - S(m-x)] + \phi(0),$$

of daar $\phi(m) = 0$ is, dus

$$\phi(0) = n\,S(m),$$
$$\phi(x) = n\,S(m-x).$$

Men kan in dit vraagstuk gerust $m = n$ nemen zonder iets aan de algemeenheid te kort te doen. Immers is dan x niet nul, dan heeft men toch reeds het geval dat $n - x$ bepaalde nummers moeten getrokken worden (daar de andere x reeds getrokken zijn). Maar voor $m = n$ is de vraag b) identiek met de vraag a), daar n verschillende nummers van zelf bepaalde nummers zijn, nl. allen van 1 tot n. Men vindt de vraag b) dus direkt door in vraag a) $m = n$ te stellen, waaruit volgt

$$\phi(x) = n\,S(n-x).$$

Als men nu bedenkt dat $(n - x)$ het aantal bepaalde ballen voorstelt, die nog getrokken moeten worden, waarbij het er niets toe doet hoeveel andere bepaalde ballen reeds getrokken zijn, vindt men voor $m < n$

$$\phi(x) = n\,S(m-x).$$

Vraagstuk CLIII.

J 2 c. Twee spelers, A en B, hebben a en b fiches en spelen telkens om één fiche; A heeft een kans p, B een kans q om te

winnen. Hoe groot is het gemiddeld aantal spelen, dat noodig is om te bewerken dat een der spelers niets meer heeft?

(F. SCHUH.)

Oplossing *van* F. SCHUH.

Om dit vraagstuk op te lossen kan men de volgende stelling toepassen:

Een zekere handeling heeft een onbeperkt aantal malen achtereen plaats. Dan is het gemiddelde aantal van de handelingen die noodig zijn om een gebeurtenis te weeg te brengen, die men kan beschouwen als het na elkaar plaats vinden van twee van elkaar onafhankelijke gebeurtenissen, gelijk aan de som der gemiddelde aantallen handelingen, noodig voor het te weeg brengen van ieder dier afzonderlijke handelingen.

Zij nl. $\phi(n)$ de kans dat de gebeurtenis in n handelingen tot stand komt, dan is $\sum_1^\infty \phi(n) = 1$ en $\sum_1^\infty n\phi(n) = \alpha$ het gemiddelde aantal handelingen daarvoor noodig. Zijn $\psi(n)$ en $\chi(n)$ die kansen voor de beide onafhankelijke gebeurtenissen, zoodat ook $\sum_1^\infty \psi(n) = 1$ en $\sum_1^\infty \chi(n) = 1$, dan is

$$\phi(n) = \psi(1)\chi(n-1) + \psi(2)\chi(n-2) + \ldots + \psi(n-1)\chi(1).$$

Het gemiddelde aantal handelingen wordt dus

$$\alpha = \sum_1^\infty n\phi(n) = \sum_1^\infty \psi(n)\{(n+1)\chi(1) + (n+2)\chi(2) + (n+3)\chi(3) + \ldots\} =$$

$$= \sum_1^\infty n\psi(n) \,.\, \sum_1^\infty \chi(m) + \sum_1^\infty \psi(n) \,.\, \sum_1^\infty m\chi(m) = \sum_1^\infty n\psi(n) + \sum_1^\infty m\chi(m) = \beta + \gamma,$$

waarin β en γ de gemiddelde aantallen handelingen zijn, noodig om de gebeurtenissen I en II te weeg te brengen.

Zij nu de gebeurtenis II niet meer van I onafhankelijk. Wij onderstellen dat als I tot stand gekomen is, er zich twee mogelijkheden kunnen voordoen, een met kans r, waarbij het gemiddelde aantal noodig voor de gebeurtenis II, δ is, en een andere met kans $1 - r$, waarvoor dat aantal ε is, dan moet men het gemiddelde aantal handelingen noodig voor II op $r\delta + (1-r)\varepsilon$ stellen en dan de vorige stelling toepassen.

Deze tweede stelling bewijst men aldus: Zijn $\chi_1(n)$ en $\chi_2(n)$ de kansen dat de gebeurtenis II in n handelingen tot stand

komt, al naar gelang zich de eene of de andere mogelijkheid voordoet, dan is $\chi(n) = r\,\chi_1(n) + (1-r)\,\chi_2(n)$ en dus

$$\gamma = \sum_1^\infty n\,\chi(n) = r\sum_1^\infty n\,\chi_1(n) + (1-r)\sum_1^\infty n\,\chi_2(n) = r\delta + (1-r)\,\varepsilon.$$

Beide stellingen zijn nu gemakkelijk uit te breiden voor meer dan twee gebeurtenissen, zoo dat na afloop van iedere gebeurtenis verschillende mogelijkheden kunnen intreden.

Passen we deze stellingen nu op ons vraagstuk toe, dan kunnen we de gebeurtenis (het zich ruineeren van een der spelers) in twee gebeurtenissen splitsen; ze kunnen nl. eerst één spel spelen (gebeurtenis I), waarbij zich 3 mogelijkheden kunnen voordoen, nl. A wint, B wint of er is remise, en nu wordt gespeeld tot een der spelers niets meer heeft (gebeurtenis II). Is het gemiddelde aantal spelen noodig voor het ruineeren van een der spelers op het oogenblik dat A nog x fiches heeft, $f(x)$, dan is dus

$$f(x) = 1 + pf(x+1) + qf(x-1) + (1-p-q)\,f(x)$$

of

$$(p+q)\,f(x) - pf(x+1) - qf(x-1) = 1,$$

uit welke lineaire differentievergelijking $f(x)$ moet bepaald worden, in aanmerking nemend dat men heeft $f(0) = 0$ en $f(a+b) = 0$.

De oplossing van de vergelijking zonder 2de lid is van den vorm λ^x; door substitutie vindt men $(p+q)\lambda - p\lambda^2 - q = 0$, dus $\lambda = 1$ of $\lambda = \frac{q}{p}$. De algemeene oplossing der vergelijking zonder 2de lid is dus $C_1 + C_2\left(\frac{q}{p}\right)^x$.

Een particuliere oplossing van de vergelijking met 2de lid is van den vorm C_3x; door substitutie vindt men $C_3 = \frac{1}{q-p}$. De algemeene oplossing van onze differentievergelijking is dus

$$f(x) = C_1 + C_2\left(\frac{q}{p}\right)^x + \frac{x}{q-p}.$$

De constanten C_1 en C_2 bepaalt men uit $f(0) = 0$ en $f(a+b) = 0$; men vindt

$$C_1 = -C_2 = \frac{a+b}{(p-q)\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right\}},$$

zoodat men heeft

$$f(x) = \frac{(a+b-x)p^{a+b} + xq^{a+b} - (a+b)p^{a+b-x}q^x}{(p-q)(p^{a+b}-q^{a+b})}.$$

Dus bij den aanvang voor het gemiddelde aantal spelen ($x=a$)

$$f(a) = \frac{bp^{a+b} + aq^{a+b} - (a+b)p^bq^a}{(p-q)(p^{a+b}-q^{a+b})}.$$

Is $p=q$, dan vindt men hieruit, door teller en noemer tweemaal naar p te differentieeren en daarna $p=q$ te stellen, $f(a) = \frac{ab}{2p}$. Dit kan men echter ook vinden door reeds in de differentievergelijking $q=p$ te stellen. Deze krijgt dan twee gelijke wortels $\lambda = 1$, maar nu zijn $f(x) = C_1$ en $f(x) = C_2x$ oplossingen van de vergelijking zonder 2de lid, terwijl $f(x) = \frac{x^2}{2p}$ een particuliere oplossing is van de vergelijking met 2de lid. De algemeene oplossing der differentievergelijking

$$2pf(x) - pf(x+1) - pf(x-1) = 1 \quad \text{is dus}$$

$$f(x) = C_1 + C_2x - \frac{x^2}{2p}.$$

De constanten C_1 en C_2 bepaalt men weer uit $f(0) = 0$ en $f(a+b) = 0$.

Men vindt $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{a+b}{2p}$, dus

$$f(x) = \frac{x(a+b-x)}{2p},$$

en

$$f(a) = \frac{ab}{2p}.$$

Sluit men remise uit ($p = \frac{1}{2}$), dan wordt nog eenvoudiger $f(a) = ab$.

Opmerking. Deze beschouwingen gelden niet voor het waarschijnlijkste aantal spelen. Welk verschil er tusschen beide

aantallen kan bestaan, ziet men aan het volgende voorbeeld. Zij $a = 1$, b groot en $p = q = \frac{1}{2}$. Dan is het gemiddelde aantal spelen b, dus groot; de kans dat in één spel een der spelers (hier A) geruineerd is, is echter $\frac{1}{2}$ en dus de kans voor alle andere aantallen spelen te zamen ook $\frac{1}{2}$. Van al die aantallen heeft 1 dus verreweg de grootste waarschijnlijkheid. Het gemiddelde aantal spelen noodig voor het zich ruineeren van een der spelers is dus b, het waarschijnlijkste aantal 1.

Vraagstuk CLIV.

M¹ 5 k α. Bepaal de meetkundige plaats der punten waarvan de projecties op vier in een vlak gelegen rechten door een cirkel kunnen verbonden worden. (Dr. J. DE VRIES.).

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, Dr. C. STOLP *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Als n rechten in een plat vlak zóó zijn gelegen, dat zij ééne kegelsnede kunnen raken, dan kunnen de projecties van de brandpunten op die rechten door een cirkel verbonden worden; want de voetpuntenlijn der brandpunten is de cirkel, dien men op de door de brandpunten gaande as als middellijn kan beschrijven. Hebben omgekeerd n rechten en één punt zóódanige ligging ten opzichte van elkaar, dat de projecties van het punt op de rechten door een cirkel kunnen verbonden worden, dan kan men een kegelsnede construeeren, die het punt tot brandpunt heeft en waarvan de as de door dit punt gaande middellijn des cirkels is; dan zal deze kegelsnede de n rechten raken.

Deze beschouwing toepassende op het geval $n = 4$ van ons vraagstuk, zien wij, dat de gevraagde meetkundige plaats identisch is met die van de brandpunten der kegelsneden, welke de gegeven rechten raken, dus met de *focaalkromme* der vierzijde.

Het punt, waarvan de projecties op de vier rechten door één rechte lijn verbonden kunnen worden, is het brandpunt der parabool, die de gegeven rechten raakt.

De meetkundige plaats van de middelpunten der voetpuntencirkels is de rechte, die door de middens der diagonalen van de vierzijde gaat.

Oplossing *van* Dr. W. BOUWMAN.

Zijn de vergelijkingen der vier lijnen

$$y = m_i x + n_i \ldots (i = 1, 2, 3, 4)$$

en is (ξ, η) het punt, waaruit de vier loodlijnen worden neergelaten, dan zijn de coördinaten der vier voetpunten

$$x_i = \frac{\xi + m_i\eta - m_i n_i}{1 + m_i^2}, \quad y_i = \frac{m_i\xi + m_i^2\eta + n_i}{1 + m_i^2}.$$

De voorwaarde, dat deze vier punten op een cirkel liggen, is

$$| x_i^2 + y_i^2 \;,\; x_i \;,\; y_i \;,\; 1 | = 0 \ldots (i = 1, 2, 3, 4).$$

Stellen wij hierin de waarden voor x_i en y_i, dan wordt

$$| \xi^2 + 2m_i\xi\eta + m_i^2\eta^2 + n_i^2 \;,\; \xi + m_i\eta - m_i n_i \;,\; m_i\xi + m_i^2\eta + n_i^2 \;,\; 1 + m_i^2 | = 0.$$

Trekken wij nu van de eerste kolom ξ maal de tweede en η maal de derde af, dan vinden wij

$$| m_i n_i \xi - n_i^2\eta + n_i^2 \;,\; \xi + m_i\eta - m_i n_i \;,\; m_i\xi + m_i^2\eta + n_i^2 \;,\; 1 + m_i^2 | = 0.$$

Deze betrekking tusschen ξ en η stelt de gezochte meetkundige plaats voor; zij is dus eene kromme van den derden graad.

Het is analytisch zoowel als meetkundig gemakkelijk in te zien, dat deze kromme door de zes snijpunten der vier gegeven lijnen gaat.

Vraagstuk CLV.

K 8 b. Gegeven zijn de zijden a, b, c, d van een koordenvierhoek. Bepaal de lengte der lijn, die de snijpunten der overstaande zijden verbindt. (Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, Dr. W. BOUWMAN, Dr. C. STOLP, Dr. A. TOXOPEUS, B. J. VAN TROTSENBURG *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. W. Bouwman.

Wij stellen AB$=a$, BC$=b$, CD$=c$, DA$=d$, (AB, DC) = E (AD, BC) = F.

De lijnen DF, FC, CE, BE zijn met behulp van gelijkvormige driehoeken gemakkelijk te vinden.

$$\mathrm{DF} = \frac{c\,(cd + ab)}{a^2 - c^2},$$

$$\mathrm{CF} = \frac{c\,(ad + bc)}{a^2 - c^2},$$

$$\mathrm{CE} = \frac{b\,(ad + bc)}{d^2 - b^2},$$

$$\mathrm{BE} = \frac{b\,(cd + ab)}{d^2 - b^2}.$$

Denken wij ons nu driehoek FDE door wenteling om FE in den stand FD'E gebracht, dan wordt EBFD' een koordenvierhoek, waarvan EF een diagonaal is.

Volgens een bekende formule hebben we dan

$$\overline{\mathrm{EF}}^2 = \frac{(\overline{\mathrm{BF}} \times \overline{\mathrm{ED'}} + \overline{\mathrm{EB}} \times \overline{\mathrm{FD'}})\,(\overline{\mathrm{BF}} \times \overline{\mathrm{FD'}} + \overline{\mathrm{D'E}} \times \overline{\mathrm{EB}})}{\overline{\mathrm{EB}} \times \overline{\mathrm{BF}} + \overline{\mathrm{FD'}} \times \overline{\mathrm{D'E}}}.$$

Stellen wij hierin de bovenstaande waarden, dan komt na eenige herleiding

$$x^2 = \frac{(ad + bc)\,(ab + dc)\,\{ac\,(d^2 - b^2)^2 + bd\,(a^2 - c^2)^2\}}{(a^2 - c^2)^2\,(d^2 - b^2)^2}.$$

Opmerking. De cirkels BCE en CDF snijden elkaar op de lijn EF. Hieruit volgt de betrekking

$$\overline{\mathrm{EF}}^2 = \overline{\mathrm{EC}} \times \overline{\mathrm{ED}} + \overline{\mathrm{FC}} \times \overline{\mathrm{FB}}.$$

(C. S.; A. T.; B. J. v. T.; J. d. V.).

Vraagstuk CLVI.

K 9 a. Wanneer van vier in een vlak gelegen rechten een evenwijdig is met de verbindingslijn van zwaartepunt en hoogtepunt

van den door de overige rechten gevormden driehoek, dan geldt deze eigenschap voor elke der overige drie. Men vraagt het bewijs. (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU, J. A. KERKHOVEN, Dr. A. VAN THIJN, B. J. VAN TROTSENBURG *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* B. J. VAN TROTSENBURG *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Zijn (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) de rechthoekige coördinaten der punten A, B, C, dan hebben de rechten BC, CA, AB tot richtingscoëfficiënten

$$m_1 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}, \quad m_2 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}, \quad m_3 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

en de loodlijnen uit A en B op BC en CA worden voorgesteld door de vergelijkingen

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_1}(x - x_1), \quad y - y_2 = -\frac{1}{m_2}(x - x_2).$$

Een willekeurige rechte door het hoogtepunt van ABC heeft tot vergelijking

$$m_1(y - y_1) + (x - x_1) + \lambda\{m_2(y - y_2) + (x - x_2)\} = 0.$$

Zij zal door het zwaartepunt gaan, als λ voldoet aan de voorwaarde

$$m_1(y_2 + y_3 - 2y_1) + (x_2 + x_3 - 2x_1) +$$
$$+ \lambda\{m_2(y_3 + y_1 - 2y_2) + (x_3 + x_1 - 2x_2)\} = 0.$$

Hieruit volgt, dat de richtingscoëfficiënt der verbindingslijn van zwaartepunt en hoogtepunt bepaald is door

$$m_4 = \frac{m_1(y_2 + y_3 - 2y_1) - m_2(y_3 + y_1 - 2y_2) - 3(x_1 - x_2)}{3m_1m_2(y_1 - y_2) + m_1(x_3 + x_1 - 2x_2) - m_2(x_2 + x_3 - 2x_1)}.$$

Gebruik makende van de betrekkingen $y_1 - y_2 = m_3(x_1 - x_2)$ enz. vindt men

$$m_4 = -\frac{m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1 + 3}{3m_1m_2m_3 + m_1 + m_2 + m_3},$$

of

$$3m_1m_2m_3m_4 + m_1m_2 + m_1m_3 + m_1m_4 + m_2m_3 + m_2m_4 + m_3m_4 + 3 = 0.$$

Uit de symmetrie dezer betrekking ten opzichte van de richtingen der vier rechten volgt terstond de waarheid der genoemde eigenschap.

Vraagstuk CLVII.

M² 9 e. Gegeven zijn twee in onderling loodrechte vlakken gelegen cirkels, welke hetzelfde middelpunt en de stralen a en b hebben. Onderzoek het oppervlak, dat omhuld wordt door het vlak, dat de verbindingslijn van een punt van den eersten cirkel met een punt van den tweeden loodrecht middendoor deelt.

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* W. MANTEL *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* W. MANTEL.

I. Als coördinaatvlakken gebruiken wij de vlakken der cirkels en een vlak door hun middelpunt loodrecht op die vlakken. De cirkels kunnen dan worden voorgesteld door $y^2 + z^2 = a^2$ met $x = 0$ en $z^2 + x^2 = b^2$ met $y = 0$. Wij zullen $a > b$ onderstellen.

Een punt P op den eersten cirkel bepalen wij door de coördinaten 0, $a \cos u$, $a \sin u$; een punt Q op den anderen door $b \cos v$, 0, $b \sin v$. Het vlak, dat PQ rechthoekig middendoor deelt, wordt dan voorgesteld door

$$(x - \tfrac{1}{2} b \cos v)(-b \cos v) + (y - \tfrac{1}{2} a \cos u)(a \cos u) + \\ + (z - \tfrac{1}{2} a \sin u - \tfrac{1}{2} b \sin v)(a \sin u - b \sin v) = 0,$$

of door

$$-bx \cos v + ay \cos u + (a \sin u - b \sin v) z = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

Door differentiatie ten opzichte van u en v vinden wij

$$-ay \sin u + az \cos u = 0,$$

$$bx \sin v - bz \cos v = 0.$$

Uit deze drie vergelijkingen volgt, dat het oppervlak wordt voorgesteld door

$$\left.\begin{aligned} x = \frac{(a^2 - b^2) \sin u \cos v}{2(a \sin v - b \sin u)}, \quad y = \frac{(a^2 - b^2) \cos u \sin v}{2(a \sin v - b \sin u)}, \\ z = \frac{(a^2 - b^2) \sin u \sin v}{2(a \sin v - b \sin u)} \end{aligned}\right\} \ldots 1)$$

Als men echter u en v elimineert, verkrijgt men

$$\pm a(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \pm b(x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2), \ldots\ldots 2)$$

of in meetbaren vorm

$$\left.\begin{array}{l} 16\,\{a^2(y^2+z^2)-b^2(x^2+z^2)\}^2- \\ -8(a^2-b^2)^2\{a^2(y^2+z^2)+b^2(x^2+z^2)\}+(a^2-b^2)^4=0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; 3).$$

Het oppervlak is dus van den vierden graad.

II. Vlakke doorsneden. In YOZ vinden wij uit 2) de twee ellipsen

$$x=0, \qquad y^2+z^2=\frac{b^2}{a^2}\left(\pm z+\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2.$$

Deze hebben O tot brandpunt en snijden elkander op OY in de punten $x=0$, $y=\pm\frac{a^2-b^2}{2a}$, $z=0$; twee imaginaire snijpunten liggen oneindig ver.

In ZOX vinden wij de twee hyperbolen

$$y=0, \qquad x^2+z^2=\frac{a^2}{b^2}\left(\pm z+\frac{a^2-b^2}{2b}\right)^2.$$

Deze hebben O tot brandpunt en snijden elkander op OX in de punten $x=\pm\frac{a^2-b^2}{2b}$, $y=0$, $z=0$; twee reëele snijpunten liggen oneindig ver.

In XOY vinden wij de vier rechte lijnen

$$z=0, \qquad \pm ay\pm bx=\tfrac{1}{2}(a^2-b^2).$$

Deze liggen in de vlakken, die de lijnen tusschen de snijpunten van OX en OY met de gegeven cirkels loodrecht middendoor deelen.

In het oneindig ver gelegen vlak heeft het oppervlak een dubbelkegelsnede; zij wordt geprojecteerd door den kegel

$$b^2x^2-a^2y^2=(a^2-b^2)\,z^2.$$

Vlakken door OX of OY snijden het oppervlak volgens twee kegelsneden; immers de doorsnede heeft vier dubbelpunten, twee op OX of OY en twee oneindig ver; uit vergelijking 2) blijkt het overigens gemakkelijk genoeg. Wil men de kegelsneden één voor één hebben, dan stelle men in 1) u of v standvastig.

Is u de standvastige, dan elimineert men v en vindt

$$z=y\,\mathrm{tg}\,u, \quad z^2+x^2=\frac{a^2}{b^2\sin^2 u}\left(z-\frac{a^2-b^2}{2a}\sin u\right)^2.$$

Als men $z = z_1 \sin u$ stelt, wordt de doorsnede in haar eigen vlak voorgesteld door

$$z_1^2 \sin^2 u + x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(z_1 - \frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2.$$

Wanneer men deze doorsneden in ZOX neerslaat, vormen ze een bundel van kegelsneden, die elkaar in twee punten der as OX aanraken.

Is v de standvastige, dan elimineert men u, en vindt

$$z = x \operatorname{tg} v, \quad y^2 + z^2 = \frac{b^2}{a^2 \sin^2 v}\left(z - \frac{a^2 - b^2}{2b} \sin v\right)^2.$$

In haar eigen vlak worden zij, door middel van $z = z_2 \sin v$, voorgesteld door de vergelijking

$$y^2 + z_2^2 \sin^2 v = \frac{b^2}{a^2}\left(z_2 - \frac{a^2 - b^2}{2b}\right)^2.$$

Twee kegelsneden van verschillende stelsels snijden elkander in een punt, waarvan 1) de coördinaten geeft. Drie kegelsneden van het eene stelsel kunnen dienen als richtlijnen voor het andere.

Een vlak door eene der in XOY gelegen rechte lijnen snijdt het oppervlak nog volgens een kromme lijn van den derden graad; in het bijzonder geval, dat het vlak evenwijdig aan OZ is, vindt men eene parabool, terwijl het vlak in alle punten der rechte aan het oppervlak raakt.

Behalve deze vier parabolen kan men nog andere kegelsneden op het oppervlak aanwijzen; de puntbol $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ snijdt het oppervlak volgens vier vlakke kromme lijnen, zooals uit 2) dadelijk is te zien. De vlakken van deze cirkels snijden het oppervlak dan nog eens weer volgens cirkels, zoodat men in het geheel acht onbestaanbare cirkels verkrijgt.

III. Dubbelpunten. Deze moeten voldoen aan de vergelijkingen, welke ontstaan door 3) ten opzichte van elke der coördinaten te differentieeren. Men ziet spoedig, dat $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ met elkaar in strijd zijn als niet x of y nul is. Er zijn geene andere dan de vroeger gevonden snijpunten der vier in XOY gelegen rechten.

De vergelijking van den raaklijnenkegel in een dubbelpunt wordt berekend naar de formule

$$\left\{(X-x)\frac{\partial}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial}{\partial z}\right\}^{(2)} f(x, y, z)=0.$$

Voor het punt $\left(\frac{a^2-b^2}{2b}, 0, 0\right)$ vindt men

$$b^2\left(X-\frac{a^2-b^2}{2b}\right)^2-a^2Y^2-a^2Z^2=0.$$

Het oppervlak ziet daar dus uit als een rechte cirkelvormige kegel.

IV. Vorm. Met behulp van de hoofddoorsneden maakt men zich eene voorstelling van het oppervlak; om den oorsprong heen ziet men een gesloten cel, die aan een kussen doet denken, waarvan de hoeken op de coördinaatassen liggen. Uit de scherpe hoeken op OX gaan kegelvormige pluimen naar het oneindige. Uit de stompe hoeken op OY gaan bladen die om OX heen zich met elkander vereenigen. Men heeft als het ware twee toegevoegde hyperboloïden met een kleine ellipsoïde er binnen in; de laatste hecht zich vast aan de toppen der tweebladige, en aan de naastbijgelegen toppen der eenbladige hyperboloïde.

Opmerkingen. I. Uit de vergelijking 2) blijkt dat het oppervlak de meetkundige plaats is voor de punten, waarvan de afstanden tot de cylindervlakken $y^2+z^2=\frac{1}{4}a^2$ en $x^2+z^2=\frac{1}{4}b^2$ zich omgekeerd verhouden als de stralen dier cylinders.

(W. M.)

II. Het raakpunt van het vlak dat PQ loodrecht middendoor deelt, met het omhulde oppervlak is gemakkelijk te construeeren, daar de vlakken $z=y \operatorname{tg} u$ en $z=x \operatorname{tg} v$ de gegeven cirkels in P en Q loodrecht snijden. Men heeft hier een bijzonder geval van de volgende, gemakkelijk te bewijzen, eigenschap: Het vlak ϕ dat de verbindingslijn van het op de kromme α gelegen punt P en het op de kromme β gelegen punt Q loodrecht middendoor deelt, omhult een oppervlak Γ als P en Q de gegeven krommen doorloopen. Het raakpunt van ϕ met Γ ligt in de normaalvlakken van α en β in P en Q.

(P. Z.)

Vraagstuk CLVIII.

0 4 c. Van welken graad is de dubbelkromme van het ontwikkelbaar oppervlak, dat een gegeven kubische ruimtekromme en een gegeven kegelsnede tot richtlijnen heeft? (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN, Dr. W. A. VERSLUYS *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

1. Zij C^2 de in het vlak V gelegen kegelsnede, R^3 de gegeven ruimtekromme. Raakvlak van het ontwikkelbaar oppervlak O, dat de beide krommen tot richtlijnen heeft, is elk vlak, dat eene raaklijn van elk der krommen bevat; beschrijvende lijn van O elke rechte, die een punt van C^2 verbindt met een punt van R^3, wanneer de raaklijnen der krommen in die punten elkander snijden.

Op het oppervlak O is R^3 eene dubbelkromme. Want de raaklijn in een willekeurig punt P van R^3 snijdt twee raaklijnen van C^2; de raakpunten dier raaklijnen bepalen twee beschrijvende lijnen van O, die door P gaan.

Verder is C^2 eene viervoudige kromme op het oppervlak. Immers de raaklijn in een willekeurig punt Q van C^2 snijdt vier raaklijnen van R^3, de raakpunten dier raaklijnen geven vier beschrijvende lijnen van O, die door Q gaan.

2. Hieruit volgt dadelijk, dat het oppervlak O van den veertienden graad is. Immers de doorsnede van O met het vlak V bestaat uit de viervoudige kegelsnede C^2 en de zes raaklijnen, welke men uit de snijpunten van R^3 met V aan C^2 kan trekken; die doorsnede is dus van den veertienden graad.

Ditzelfde getal vindt men ook op de volgende wijs. Overeenstemmende punten van R^3 en C^2 noemen wij punten, die op eene beschrijvende lijn van O liggen; met een punt A van R^3 komen dus twee punten van C^2, met een punt B van C^2 vier punten van R^3 overeen. Is nu l eene willekeurige rechte der ruimte en projecteert men uit l de punten van R^3 en C^2 door twee vlakkenbundels W en W_1, dan ontstaat tusschen de vlakken dier bundels eene correspondentie (6, 8). Immers elk vlak W snijdt R^3 in drie punten en met elk dezer komen op C^2 twee punten overeen, zoodat met elk vlak W zes vlak-

ken W_1 overeenstemmen. Evenzoo snijdt C^2 elk vlak W_1 in twee punten, die elk met vier punten van R^3 overeenkomen; met een vlak W_1 stemmen dus acht vlakken W overeen.

In eene dergelijke correspondentie komt het veertienmaal voor dat een vlak W met een homoloog vlak W_1 samenvalt. Door de willekeurige rechte l gaan dus 14 vlakken, die elk een punt van C^2 en een daarmee overeenstemmend punt van R^3, dus eene beschrijvende lijn van O bevatten; O heeft dus met l veertien punten gemeen.

3. Ten einde het aantal raakvlakken van O door een willekeurig punt M, dus de klasse van O, te bepalen, projecteere men uit M de beide krommen C^2 en R^3 door twee kegels, die dan achtereenvolgens van de tweede en vierde klasse zijn. Deze kegels hebben acht gemeenschappelijke raakvlakken, het oppervlak O is dus van de achtste klasse.

Zooals men dadelijk inziet, komen op O geene dubbelrechten voor, daarentegen wel stationaire raakvlakken. Daar toch de kromme R^3 van de derde klasse is, zijn er zes osculatievlakken dezer kromme, die C^2 aanraken. Elk dezer osculatievlakken heeft met R^3 twee opvolgende elementen gemeen; daarin vallen dus twee opvolgende raakvlakken van O samen, zoodat elk hunner een stationair raakvlak van O zal wezen. Het aantal dezer vlakken is dus zes.

De gevonden getallen stellen ons in staat, om den graad der volledige dubbelkromme van het oppervlak O te bepalen. Volgens de formules van CAYLEY heeft men:

$$k = n(n-1) - 2(x+d) - 3(m+\theta),$$

$$\alpha = 3n(n-2) - 6(x+d) - 8(m+\theta),$$

waarin n en k graad en klasse van O, m den graad van de keerlijn, θ het aantal buigraaklijnen dier keerlijn, α het aantal stationaire raakvlakken van O, x den graad der volledige dubbelkromme en d het aantal dubbelrechten van het oppervlak voorstelt. Substitueert men nu hierin $n = 14$, $k = 8$, $d = 0$, $\alpha = 6$, dan verkrijgt men, door eliminatie van $m + \theta$,

$$x = 51.$$

Dit is de graad van de volledige dubbelkromme van O. De doorsnede van O met een willekeurig vlak is dus eene kromme, die 51 dubbelpunten heeft. Drie daarvan liggen in de snij-

punten van dat vlak met R^3; bovendien heeft het vlak met C^2 twee punten gemeen die, omdat C^2 eene viervoudige kromme op O is, elk een viervoudig punt der doorsnede zullen opleveren. Daar nu een viervoudig punt voor zes dubbelpunten telt, zullen in de beide snijpunten van C^2 met het vlak 12 van de 51 dubbelpunten vereenigd zijn. De doorsnede van het willekeurige vlak met O heeft dus 36 dubbelpunten, die op het noch met R^3 noch met C^2 samenvallende deel der dubbelkromme gelegen zijn. Dat deel is dus eene ruimtekromme van den 36^{en} graad.

4. Bij het voorgaande is ondersteld, dat R^3 met het vlak V drie punten gemeen heeft, waarvan geene twee samenvallen en geen enkel op C^2 gelegen is. Is aan die onderstelling niet voldaan, dan zal het van R^3 en C^2 verschillende deel der dubbelkromme van lageren graad zijn.

Op analoge wijze als boven vindt men:

1) Raakt R^3 het vlak V in een niet op C^2 gelegen punt, dan is dat deel der dubbelkromme van den 26^{en} graad;

2) Osculeert R^3 het vlak V in een niet op C^2 gelegen punt, dan is het van den 18^{en} graad;

3) Heeft R^3 met C^2 één punt gemeen, dan is het bedoelde deel der dubbelkromme van den 20^{en} graad;

4) Heeft R^3 met C^2 twee punten gemeen, dan is het van den 8^{en} graad;

5) Heeft R^3 met C^2 drie punten gemeen, dan heeft O, behalve k^3 en C^2, geene dubbelkromme.

Laat men het vlak V overgaan in 't vlak in 't oneindige, C^2 in den imaginairen cirkel in 't oneindige, dan gaat het in 't voorgaande onderzochte deel der dubbelkromme van O over in de focaalkromme van R^3, dus in de meetkundige plaats der middelpunten van alle puntbollen, die eene dubbele aanraking met R^3 hebben. Uit het voorgaande volgt dan, dat de focaalkromme van eene kubische ellips of hyperbool, eene kubische hyperbolische parabool of eene kubische parabool achtereenvolgens eene ruimtekromme van den 36^{en}, 26^{en} en 18^{en} graad zal zijn. Heeft eindelijk R^3 met den imaginairen cirkel twee punten gemeen, dan is die focaalkromme van den 8^{en} graad.

Vraagstuk CLIX.

M⁸ 5 h α. Bepaal de meetkundige plaats van de middelpunten der bollen, welke een dubbele aanraking hebben met de kubische parabool $x = t^3$, $x = t^2$, $z = t$. (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. J. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

De bol $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ snijdt de gegeven kubische parabool in zes punten; de bij die punten behoorende parameterwaarden zijn de wortels der vergelijking

$$(t^3-\alpha)^2 + (t^2-\beta)^2 + (t-\gamma)^2 = R^2,$$

of

$$t^6 + t^4 - 2\alpha t^3 + (1-2\beta)t^2 - 2\gamma t + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2 = 0.$$

Zal deze bol eene dubbele aanraking hebben met de kromme in de punten t_1 en t_2 en haar bovendien snijden in de punten t_3 en t_4, dan moet deze vergelijking identiek zijn met

$$(t-t_1)^2(t-t_2)^2(t-t_3)(t-t_4) = 0,$$

of, als men $t_1 + t_2 = u$, $t_1t_2 = v$, $t_3 + t_4 = u_1$, $t_3t_4 = v_1$ stelt, met

$$t^6 - (2u+u_1)t^5 + (u^2+2v+2uu_1+v_1)t^4 - (2uv+(u^2+2v)u_1+2uv_1)t^3 +$$
$$+ (v^2+2uvu_1+(u^2+2v)v_1)t^2 - (v^2u_1+2uvv_1)t + v^2v_1 = 0.$$

Daartoe is noodig en voldoende, dat men heeft

$$\left.\begin{array}{ll} 2u+u_1 = 0, & u^2+2v+2uu_1+v_1 = 1, \\ 2uv+(u^2+2v)u_1+2uv_1 = 2x, & v^2+2uvu_1+(u^2+2v)v_1 = 1-2y, \\ v^2u_1+2uvv_1 = 2z, & v^2v_1 = x^2+y^2+z^2-R^2, \end{array}\right\} \ldots 1)$$

waarin α, β en γ door x, y en z zijn vervangen.

Uit de eerste twee dezer betrekkingen volgt

$$u_1 = -2u \quad , \quad v_1 = 1 + 3u^2 - 2v \quad \ldots\ldots \quad 2).$$

Door substitutie in de drie betrekkingen, in welke R niet voorkomt, verkrijgt men

$$\left.\begin{array}{l} x = u(2u^2-3v+1), \\ y = \frac{1}{2}(1-3u^4-u^2+3v^2-2v), \\ z = uv(3u^2-3v+1). \end{array}\right\} \ldots\ldots 3).$$

Geeft men in deze formules aan de parameters u en v alle mogelijke waarden, dan bepalen zij een oppervlak, de meetkundige plaats der middelpunten van alle bollen, die eene dubbele aanraking met de gegeven kubische parabool hebben.

Ten einde den graad van het oppervlak te bepalen, zoeken wij het aantal der snijpunten met de rechte

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

Daartoe moet worden gezocht, hoeveel stelsels van waarden voor u en v aan de vergelijkingen

$$Au(2u^2-3v+1)+\frac{B}{2}(1-3u^4-u^2+3v^2-2v)+Cuv(3u^2-3v+1)+D=0,$$

$$A_1u(2u^2-3v+1)+\frac{B_1}{2}(1-3u^4-u^2+3v^2-2v)+C_1uv(3u^2-3v+1)+D_1=0$$

voldoen.

Elimineert men hieruit v, dan zal bij elken wortel u van de komende vergelijking, ééne waarde van v behooren; samen bepaalt zulk een stelsel waarden voor u en v één punt van het oppervlak; de graad van het oppervlak is dus gelijk aan den graad der resultante in u. Men vindt nu, dat deze resultante schijnbaar van den 11^{en} graad is, doch dat de termen in u^{10} en u^0 verdwijnen. *Het oppervlak is dus van den negenden graad.*

Dit blijkt ook, als wij de doorsnede van 't oppervlak met een vlak bepalen. Kiezen wij daarvoor $x = 2z$, dan is volgens 3)

$$u(2u^2 - 3v + 1) = 2uv(3u^2 - 3v + 1),$$

of

$$u(1 - 3v)(2u^2 - 2v + 1) = 0.$$

Hieraan wordt voldaan ten eerste door $u = 0$,

dus $\qquad x = 0, \quad y = \frac{1}{2}(1 + 3v^2 - 2v), \quad z = 0,$

d.i. de as OY. Daar in de uitdrukking voor y de parameter v tot de tweede macht voorkomt, is deze rechte eene *dubbellijn* van het oppervlak.

Verder vinden wij

$$1 - 3v = 0 \text{ of } v = \tfrac{1}{3},$$

dus

$$x = 2u^3, \quad y = \tfrac{1}{6}(2 - 3u^2 - 9u^4), \quad z = u^3,$$

d.i. eene kromme van den vierden graad.

Ten slotte $2u^2 - 2v + 1 = 0$ of $v = u^2 + \frac{1}{2}$,

dus

$$x = -\tfrac{1}{2}u(1 + 2u^2) \quad , \quad y = \tfrac{3}{8} \quad , \quad z = -\tfrac{1}{4}u(1 + 2u^2),$$

d.i. de rechte $x = 2z$, $y = \frac{3}{8}$, die eene *drievoudige* lijn op het oppervlak is.

De doorsnede van het vlak $x = 2z$ met het oppervlak bestaat dus uit eene kromme van den vierden graad, een tweevoudige en eene drievoudige rechte; zij is dus van den negenden graad.

Zoekt men, op analoge wijze als boven, het aantal der raakvlakken van het oppervlak, die door eene willekeurige rechte gaan, dan blijkt dit vijf te zijn. *Het oppervlak is derhalve van de vijfde klasse.*

Op het oppervlak liggen o.a.

1e. *Oneindig veel kegelsneden, met de vergelijkingen $u =$ constante.* Elimineert men uit de vergelijkingen 3) den parameter v, dan blijkt dat die kegelsneden ook bepaald worden door de vergelijkingen

$$(3u^2 - 1)X + 6uY + 3Z + (3u^5 + 2u^3 - 2u) = 0,$$

$$X^2 - (u^2 + 1)uX + 3uZ = u^4(2u^2 + 1),$$

van welke de eerste, als men daarin aan u achtereenvolgens alle waarden geeft, ∞^1 platte vlakken, de tweede ∞^1 parabolische cylinders voorstelt. Elk der platte vlakken snijdt den daarbij behoorenden parabolischen cylinder volgens eene parabool, die op het oppervlak ligt. Daar in de vergelijking van 't platte vlak u tot de vijfde macht voorkomt, gaan door elk punt der ruimte vijf vlakken, die het oppervlak o.a. volgens eene parabool snijden. Deze vlakken zijn de osculatievlakken eener rationale ruimtekromme van den vijfden graad.

2e. *Oneindig veel biquadratische ruimtekrommen;* men verkrijgt deze door in 1) $v = au + b$ te stellen, waarin a en b constanten zijn.

3e. *De meetkundige plaats der middelpunten van alle kromtebollen.* Een bol, die de kubische parabool in t_1 en t_2 aanraakt, gaat over in een kromtebol, d.i. een bol, die vier samenvallende punten met de kromme gemeen heeft als $t_1 - t_2 = 0$ of $u^2 - 4v = 0$ is. Door substitutie in 3) vindt men voor de meetkundige plaats der middelpunten van die kromtebollen

$$x = \frac{u}{4}(5u^2+4) \quad , \quad y = -\frac{1}{32}(45u^4+24u^2-16) \quad , \quad z = \frac{u^3}{16}(9u^2+4),$$

dus eene rationale ruimtekromme van den vijfden graad. Op deze kromme ligt het middelpunt van één kromtebol, die bovendien de kubische parabool nog in een tweede punt $t_3 = t_4$ aanraakt. Voor dien bol moet niet alleen $u^2 = 4v$ doch ook $u_1^2 = 4v_1$ zijn.

4e. *De meetkundige plaats van de centra der bollen, die eene drievoudige aanraking met de kromme hebben.* Voor deze bollen moet $t_3 = t_4$ zijn. Daartoe is noodig en voldoende, dat men heeft

$$u_1^2 - 4v_1 = 0, \text{ dus } u^2 = (1 + 3u^2 - 2v), \text{ of } v = \frac{1+2u^2}{2}.$$

Substitueert men dit in 3), dan verkrijgt men voor de gezochte meetkundige plaats

$$x = -\frac{u}{2}(2u^2+1) \quad , \quad y = \tfrac{3}{8} \quad , \quad z = -\frac{u}{4}(2u^2+1),$$

of

$$x = 2z \quad , \quad y = \tfrac{3}{8},$$

d. i. de reeds boven gevonden drievoudige rechte.

Zij is de as van de eenige omwentelingshyperboloïde, die door de kubische parabool gaat. Deze hyperboloïde heeft tot vergelijking $4Y^2 + 3Z^2 - 4XZ - 3Y = 0$.

5e. *De meetkundige plaats der middelpunten van alle dubbelrakende bollen, die een gegeven straal* R *hebben.* Deze wordt bepaald, door in de laatste der betrekkingen 1), nl.

$$v^2 v_1 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2,$$

voor v_1, x, y en z hunne uitdrukkingen in u en v uit 2) en 3) in de plaats te stellen. Dit geeft

$$v^2(1+3u^2-2v) = u^2(2u^2-3v+1)^2 + \tfrac{1}{4}(1-3u^4-u^2+3v^2-2v)^2 + \\ + u^2v^2(3u^2-3v+1)^2 - R^2.$$

Deze betrekking tusschen u en v kan als de vergelijking der meetkundige plaats worden beschouwd. Ten einde den graad dezer ruimtekromme te bepalen, zoeken wij het aantal snijpunten

met het vlak $x = 2z$. Zooals boven gevonden werd, heeft men voor dit vlak

$$u(1 - 3v)(2u^2 - 2v + 1) = 0.$$

Nu leveren $u = 0$, $3v = 1$ en $2v = 2u^2 + 1$ achtereenvolgens 4, 8 en 6 punten der ruimtekromme; deze is dus van den 18^{en} graad.

Voor $R = 0$ vindt men hieruit, dat de focaalkromme der gegeven kubische parabool een ruimtekromme van den achttienden graad is.

Vraagstuk CLX.

R 8 a α. In een punt P van een lichaam van onveranderlijke gedaante dat in rust verkeert en waarvan één punt vast is, grijpt een impulsie van gegeven grootte aan. In welke richting moet deze werken, opdat de door haar gegeven hoeksnelheid maximum zij?

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Tot coördinaatassen nemen wij de, bij het vaste punt O van het lichaam behoorende, hoofdtraagheidsassen. Zijn A, B, C de hoofdtraagheidsmomenten van 't lichaam voor de assen OX, OY, OZ; x, y en z de coördinaten van 't aangrijpingspunt P der impulsie I; α, β en γ de cosinussen der hoeken, welke de richting der impulsie met de coördinaatassen maakt; ω de hoeksnelheid, waarmede het lichaam begint te wentelen; p, q en r de projecties van ω op de assen, dan heeft men, door op te merken, dat ten opzichte van elk dier assen de som der momenten van de hoeveelheden van beweging van alle punten van het lichaam gelijk is aan het moment der impulsie, de volgende vergelijkingen

$$Ap = (y\gamma - z\beta)\,I,$$
$$Bq = (z\alpha - x\gamma)\,I,$$
$$Cr = (x\beta - y\alpha)\,I.$$

Hieruit volgt

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = I^2 \left\{ \frac{(y\gamma - z\beta)^2}{A^2} + \frac{(z\alpha - x\gamma)^2}{B^2} + \frac{(x\beta - y\alpha)^2}{C^2} \right\}$$

of

$$\frac{A^2B^2C^2}{I^2}\omega^2 = B^2C^2(y\gamma - z\beta)^2 + C^2A^2(z\alpha - x\gamma)^2 + A^2B^2(x\beta - y\alpha)^2 \,..\, 1)$$

Nu kan men dadelijk afleiden, in welke richting I moet werken, opdat de door haar aan 't lichaam meegedeelde hoeksnelheid maximum zij. Zet men toch op elke lijn door P, naar weerskanten, een stuk ρ uit, gelijk aan $\frac{I}{ABC\omega}$, dus omgekeerd evenredig met de hoeksnelheid, die het lichaam verkrijgt, wanneer de impulsie langs die lijn werkt, dan zijn, ten opzichte van coördinaatassen door P, die evenwijdig zijn met de hoofdtraagheidsassen van O, de coördinaten van 't uiteinde van dit stuk

$$X = \rho\alpha \quad , \quad Y = \rho\beta \quad , \quad Z = \rho\gamma.$$

De vergelijking der meetkundige plaats van de uiteinden dier stukken wordt verkregen, door uit deze drie betrekkingen en 1) α, β en γ te elimineeren. Dit geeft

$$B^2C^2(yZ - zY)^2 + C^2A^2(zX - xZ)^2 + A^2B^2(xY - yX)^2 = 1 \,..\, 2).$$

Die meetkundige plaats is derhalve een elliptische cylinder, waarvan de beschrijvende lijnen evenwijdig zijn met de lijn OP. Van dien cylinder zijn de assen 1e de lijn OP, 2e de beide assen van de ellips, volgens welke het vlak door P, loodrecht op OP, dien cylinder snijdt. De richting, volgens welke de impulsie I in P moet werken om de grootste hoeksnelheid te geven, is nu die van de kleinste as dier ellips. In een punt P van het lichaam is dus in 't algemeen slechts ééne dergelijke richting aan te geven.

Ten einde de grootte der maximumhoeksnelheid te berekenen, stelt men

$$d(\omega^2) = 0,$$

of

$$B^2C^2(y\gamma - z\beta)(yd\gamma - zd\beta) + C^2A^2(z\alpha - x\gamma)(zd\alpha - xd\gamma) + \\ + A^2B^2(x\beta - y\alpha)(xd\beta - yd\alpha) = 0,$$

voor alle waarden $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ die gebonden zijn aan de voorwaarde

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0.$$

Als λ een nog onbepaalden factor voorstelt, heeft men dus

$$\left.\begin{array}{l} A^2\alpha(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)-A^2x(A^2x\alpha+B^2y\beta+C^2z\gamma)=\lambda\alpha \\ B^2\beta(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)-B^2y(A^2x\alpha+B^2y\beta+C^2z\gamma)=\lambda\beta \\ C^2\gamma(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)-C^2z(A^2x\alpha+B^2y\beta+C^2z\gamma)=\lambda\gamma \end{array}\right\} \quad .. \; 3).$$

De factor λ heeft eene eenvoudige beteekenis. Vermenigvuldigt men toch deze vergelijkingen achtereenvolgens met α, β, γ en telt ze daarna samen, dan heeft men

$$\begin{aligned} \lambda &= (A^2\alpha^2+B^2\beta^2+C^2\gamma^2)(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)-(Ax\alpha+By\beta+Cz\gamma)^2 \\ &= B^2C^2(y\gamma-z\beta)^2+C^2A^2(z\alpha-x\gamma)^2+A^2B^2(x\beta-y\alpha)^2, \end{aligned}$$

d. i. met het oog op de vergelijking 1), $\lambda = \frac{A^2B^2C^2}{I^2}\omega^2$, waarin nu ω de hoeksnelheid voorstelt, die het lichaam verkrijgt, wanneer de impulsie I in P werkt langs een der assen van den bovengevonden cylinder; λ is blijkbaar het omgekeerde van een der assen van dien cylinder. Door eliminatie van α, β, γ uit de vergelijkingen 3) verkrijgt men ter bepaling van λ

$$\begin{vmatrix} A^2(B^2y^2+C^2z^2)-\lambda & -A^2B^2xy & -A^2C^2zx \\ -A^2B^2xy & B^2(C^2z^2+A^2x^2)-\lambda & -B^2C^2yz \\ -A^2C^2zx & -B^2C^2yz & C^2(A^2x^2+B^2y^2)-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\,[\lambda^2-\{B^2C^2(y^2+z^2)+C^2A^2(z^2+x^2)+A^2B^2(x^2+y^2)\}\lambda+ \\ \quad +A^2B^2C^2(x^2+y^2+z^2)(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2)]=0 \end{array}\right\} \quad .. \; 4).$$

Is λ_1 de grootste wortel dezer vergelijking, dan wordt de maximumhoeksnelheid, die het lichaam, onder de werking van de in P aangrijpende impulsie I kan verkrijgen, bepaald door

$$\omega_1{}^2 = \frac{I^2}{A^2B^2C^2}\lambda_1.$$

De beteekenis der beide andere wortels dier vergelijking is onmiddellijk in te zien.

Van de vele gevolgtrekkingen, die men uit het voorgaande kan maken, noemen wij alleen de volgende:

De meetkundige plaats der punten P van het lichaam, waarvoor de maximumhoeksnelheid een bepaalde waarde ω_0 heeft, is een oppervlak, waarvan men de vergelijking verkrijgt

door uit te drukken, dat een der wortels der vergelijking 4) gelijk is aan $\frac{A^2B^2C^2}{I^2}\omega_0^2$.

Men vindt

$$\frac{A^2B^2C^2}{I^4}\omega_0^4 - \{B^2C^2(y^2+z^2) + C^2A^2(z^2+x^2) + A^2B^2(x^2+y^2)\}\frac{\omega_0^2}{I^2} +$$
$$+ (x^2+y^2+z^2)(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2) = 0.$$

Dit is blijkbaar een golfoppervlak, dat op de bekende wijze uit de ellipsoïde

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = \frac{\omega_0^2}{I^4}$$

kan worden afgeleid.

Vraagstuk CLXI.

B 1 a. Men vraagt de vergelijking

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

te herleiden tot de gedaante

$$\frac{P_1}{p_1-\rho} + \frac{P_2}{p_2-\rho} + \frac{P_3}{p_3-\rho} = 1.$$

(C. VAN ALLER.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, J. A. BARRAU, Dr. W. BOUWMAN, E. D. J. DE JONGH Jr., Dr. A. J. A. PRANGE, F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing.

Blijkbaar kunnen van de zes grootheden P_k en p_k er drie willekeurig worden aangenomen.

Wij nemen nu voor p_1, p_2 en p_3 willekeurige, onderling verschillende waarden, en moeten dan P_1, P_2, P_3 zoo bepalen, dat de vormen

$$(p_1-\rho)(p_2-\rho)(p_3-\rho) - P_1(p_2-\rho)(p_3-\rho) -$$
$$- P_2(p_3-\rho)(p_1-\rho) - P_3(p_1-\rho)(p_2-\rho)$$

en

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix}$$

identiek worden.

Door te stellen $\rho = p_1$ vindt men terstond

$$P_1 = \begin{vmatrix} a_{11}-p_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-p_1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-p_1 \end{vmatrix} : (p_1-p_2)(p_3-p_1).$$

Cyclische verwisseling levert hieruit de waarden van P_2 en P_3.

(F. S. en C. S.)

Kiest men in het bijzonder $p_1 = a_{11}$, $p_2 = a_{22}$, $p_3 = a_{33}$, dan wordt

$$P_1 = \frac{a_{13}a_{31}(a_{22}-a_{11}) + a_{12}a_{21}(a_{33}-a_{11}) - (a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13})}{(a_{22}-a_{11})(a_{33}-a_{11})}.$$

(DE J. en P.)

Vraagstuk CLXII.

P 1 b. Men beschouwt twee collineaire vlakke stelsels, waarin de lijn in het oneindige dubbelrechte is. Als men weet dat een gegeven driehoek wordt omgezet in den driehoek, die tot hoekpunten heeft de spiegelbeelden van de hoekpunten van den eersten driehoek ten opzichte van de overstaande zijden, vraagt men het dubbelpunt der beide stelsels te bepalen. (C. VAN ALLER.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, Dr. W. BOUWMAN, F. SCHUH *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* F. SCHUH.

We nemen een rechthoekig assenstelsel aan. Zij $P(x, y)$ een punt van het eene stelsel, en $P'(x', y')$ het overeenkomstige punt in het andere stelsel, dan heeft men, als de lijn in het oneindige dubbelrechte is,

$$x' = ax + by + e,$$

$$y' = cx + dy + f.$$

Het dubbelpunt der beide stelsels vindt men door $x' = x$ en $y' = y$ te stellen. Nemen we dit dubbelpunt als oorsprong aan, dan is $e = f = 0$. We weten nu verder, dat een gegeven driehoek, met hoekpunten $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ en $A_3(x_3, y_3)$, wordt omgezet in den driehoek $A'_1 A'_2 A'_3$, zoodat A'_k het spiegelbeeld van A_k ten opzichte van $A_l A_m$ is. Men heeft nu

$$x'_1 = ax_1 + by_1,$$
$$x'_2 = ax_2 + by_2,$$
$$x'_3 = ax_3 + by_3,$$

zoodat a en b alleen gevonden kunnen worden als voldaan is aan

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x_1 & y_1 \\ x'_2 & x_2 & y_2 \\ x'_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Evenzoo moet men hebben

$$\begin{vmatrix} y'_1 & x_1 & y_1 \\ y'_2 & x_2 & y_2 \\ y'_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wij hebben bijgevolg de voorwaarden

$$\begin{Vmatrix} x'_1 & y'_1 & x_1 & y_1 \\ x'_2 & y'_2 & x_2 & y_2 \\ x'_3 & y'_3 & x_3 & y_3 \end{Vmatrix} = 0$$

of

$$\begin{Vmatrix} x'_1 - x_1 & y'_1 - y_1 & x_1 & y_1 \\ x'_2 - x_2 & y'_2 - y_2 & x_2 & y_2 \\ x'_3 - x_3 & y'_3 - y_3 & x_3 & y_3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Onderstellen we, dat het omloopen van den driehoek in de richting $A_1A_2A_3$ in denzelfden zin plaats vindt als de draaiing van de positieve X-as naar de positieve Y-as, welke draaiing we positief noemen. Zijn h_1, h_2, h_3 de hoogten van driehoek $A_1A_2A_3$, en l_1, l_2, l_3 de lengten der zijden, dan heeft men de betrekkingen

$$x'_1 - x_1 = \frac{2h_1(y_3 - y_2)}{l_1} \text{ en } y'_1 - y_1 = \frac{2h_1(x_2 - x_3)}{l_1},$$

benevens de hieruit door kringverwisseling te vinden vergelijkingen.

Zijn nu H_1, H_2 en H_3 de lengten der loodlijnen uit O op de zijden van driehoek $A_1A_2A_3$ neergelaten, en wordt H_1 positief gerekend als de draaiing OA_2A_3 een positieven zin heeft (de h_k en de l_k nemen we steeds positief), dan is $x_2y_3 - x_3y_2 = 2l_1H_1$.

De beide voorwaarden worden nu

$$h_1H_1(y_3 - y_2) + h_2H_2(y_1 - y_3) + h_3H_3(y_2 - y_1) = 0$$

en

$$h_1H_1(x_2 - x_3) + h_2H_2(x_3 - x_1) + h_3H_3(x_1 - x_2) = 0,$$

of, daar de h_k omgekeerd evenredig zijn met de l_k

$$H_1\frac{y_3 - y_2}{l_1} + H_2\frac{y_1 - y_3}{l_2} + H_3\frac{y_2 - y_1}{l_3} = 0$$

en

$$H_1\frac{x_3 - x_2}{l_1} + H_2\frac{x_1 - x_3}{l_2} + H_3\frac{x_2 - x_1}{l_3} = 0.$$

We beschouwen nu drie vectoren V_1, V_2 en V_3, waarvan V_1 ontstaat door H_1 langs de zijde A_2A_3 van den driehoek in de richting van A_2 naar A_3 uit te zetten enz.

De X- en Y-componenten V_{1x} en V_{1y} van V_1 zijn $H_1\frac{x_3 - x_2}{l_1}$ en $H_1\frac{y_3 - y_2}{l_1}$, zoodat de beide voorwaarden ook te schrijven zijn in den vorm

$$V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} = 0,$$

$$V_{1y} + V_{2y} + V_{3y} = 0.$$

Deze kunnen vervangen worden door de vectorvergelijking

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0.$$

Beschouwt men de zijden van driehoek $A_1A_2A_3$ als vectoren l_1, l_2 en l_3 (l_1 in de richting van A_2 naar A_3 enz.) dan is

$$l_1 + l_2 + l_3 = 0.$$

Uit de beide laatste vergelijkingen volgt dan

$$V_1 : l_1 = V_2 : l_2 = V_3 : l_3 = \text{scalaire constante}.$$

Derhalve is

$$H_1 : H_2 : H_3 = l_1 : l_2 : l_3.$$

Hieruit ziet men, dat O zoodanig binnen driehoek $A_1A_2A_3$

gelegen is, dat de verhoudingen der loodlijnen H_1, H_2, H_3 uit O op de zijden neergelaten, gelijk zijn aan de verhoudingen der zijden van den driehoek.

Het dubbelpunt valt dus samen met het punt van LEMOINE (snijpunt der antiparallele medianen) van driehoek $A_1A_2A_3$.

Oplossing *van* C. VAN ALLER *en* Dr. J. DE VRIES.

Uit de gegevens blijkt gemakkelijk, dat men bij een willekeurig punt P van het stelsel, waartoe de hoekpunten van driehoek ABC behooren, het overeenkomstige punt van het tweede stelsel vindt door, uitgaande van P, drie vectoren op te tellen, die in grootte en richting worden voorgesteld door de loodlijnen uit P neergelaten op de zijden van den driehoek.

De vector PP′ is dus het dubbel van de resultante der drie door de bedoelde loodlijnen aangewezen vectoren. Hieruit volgt terstond, dat P′ met P moet samenvallen; wanneer deze resultante verdwijnt, d. w. z. als de loodlijnen x, y, z, uit P op BC, CA, AB neergelaten, voldoen aan de betrekkingen

$$x : \sin A = y : \sin B = z : \sin C.$$

Het gevraagde dubbelpunt is dus het punt van LEMOINE van driehoek ABC.

Voor de normale coördinaten van P′ vindt men gemakkelijk

$$x' = -x + 2y \cos C + 2z \cos B,$$
$$y' = 2x \cos C - y + 2z \cos A,$$
$$z' = 2x \cos B + 2y \cos A - z.$$

Het dubbelpunt wordt derhalve bepaald door twee van de volgende onderling afhankelijke vergelijkingen

$$x = y \cos C + z \cos B,$$
$$y = z \cos A + x \cos C,$$
$$z = x \cos B + y \cos A.$$

Hieruit vindt men weer

$$x : \sin A = y : \sin B = z : \sin C.$$

OPMERKING VAN Dr. W. BOUWMAN. Is de collineatie van twee complanaire stelsels bepaald door de puntenparen A, A′; B, B′; C, C′, terwijl men weet dat de rechte l dubbellijn is,

dan kan men het dubbelpunt der stelsels aldus bepalen. Wij zoeken de dubbelpunten M en N der collocale projectieve puntenreeksen, welke op l aangewezen zijn door de snijpunten dezer rechte met de lijnenparen BC, B'C'; CA, C'A'; AB, A'B'. Het punt M is de top van twee collocale projectieve stralenbundels, waarvan l een der dubbelstralen is; de tweede dubbelstraal m kan door een lineaire constructie gevonden worden. Construeert men nog den tweeden dubbelstraal n der collocale stralenbundels, waarvan N de top is, dan is (m, n) het gevraagde dubbelpunt.

Vraagstuk CLXIII.

R 1 a. Een stoffelijk punt rust op een horizontaal vlak. Dit vlak wordt in eenparige benedenwaartsche beweging gebracht. Men vraagt de beweging van het punt te onderzoeken voor de gevallen van onvolkomen en volkomen veerkracht bij de botsing.

(J. A. BARRAU.)

Opgelost *door* J. A. BARRAU *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* F. SCHUH.

We kunnen aan het stelsel, gevormd door horizontaal vlak en stoffelijk punt, een eenparige bovenwaartsche beweging geven, die de benedenwaartsche van het vlak opheft; immers bij de botsing komt het slechts op de relatieve snelheid aan. Daardoor is nu het vlak in rust gekomen, maar het stoffelijk punt krijgt een vertikaal naar boven gerichte snelheid v. Dit punt zal nu tot een hoogte $h_1 = \frac{v^2}{2g}$ opstijgen en na een tijd $\frac{2v}{g}$ met een snelheid $-v$ (we noemen de snelheid positief als ze naar boven gericht is) weer op het vlak terecht komen. Bij onvolkomen veerkrachtige botsing wordt de snelheid na de botsing λv $(0 \leq \lambda \leq 1)$; het punt stijgt nu op tot een hoogte $h_2 = \frac{\lambda^2 v^2}{2g} = \lambda^2 h_1$ en komt na een tijd $t_2 = \frac{2\lambda v}{g} = \lambda t_1$ met een snelheid $-\lambda v$ weer op het vlak terecht. Na de tweede botsing wordt de snelheid $\lambda^2 v$, het punt stijgt nu op tot een hoogte $\lambda^3 h_1$ en komt na een tijd $\lambda^2 t_1$ weer op het vlak enz.

Om de in het vraagstuk gevraagde beweging te krijgen hebben we bij deze beweging slechts een eenparige beweging met een snelheid $-v$ op te tellen. Onmiddellijk voor de eerste botsing is dus de snelheid van het punt $-2v$, na de eerste botsing $-v(1-\lambda)$; voor de tweede botsing is de snelheid $-v(1+\lambda)$, na de tweede botsing $-v(1-\lambda^2)$; voor de derde botsing is de snelheid $-v(1+\lambda^2)$, na de derde botsing $-v(1-\lambda^3)$ enz. De snelheid is dus steeds benedenwaartsch en gaat steeds minder van v verschillen; de botsingen volgen elkaar steeds sneller op.

Is de botsing volkomen veerkrachtig, dan is $\lambda = 1$. De snelheid onmiddellijk voor iedere botsing is nu $-2v$ en na iedere botsing 0. De tijd, die tusschen 2 botsingen verloopt, is steeds $\frac{2v}{g}$ en de grootste afstand van het punt tot het vlak steeds $\frac{v^2}{2g}$.

Vraagstuk CLXIV.

Q 2. In de ruimte met n afmetingen komen drie regelmatige cellen voor, namelijk de $(n+1)$-cel, de $2n$-cel en de 2^n-cel. Gevraagd de verhouding der inhouden van deze drie figuren bij gelijkheid van ribben. (J. A. BARRAU.)

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

Is a de ribbe van de regelmatige $2n$-cel, dan wordt haar inhoud voorgesteld door a^n.

Zij A een hoekpunt van de $(n+1)$-cel S_n, M haar middelpunt en M_1 het middelpunt van een der door A gaande begrenzende cellen S_{n-1}, dan is driehoek AMM_1 rechthoekig in M_1. Uitgedrukt in de hoogten van S_n en S_{n-1}, worden de zijden van dien driehoek voorgesteld door

$$\frac{n}{n+1}h_n, \quad \frac{1}{n+1}h_n, \quad \frac{n-1}{n}h_{n-1}.$$

Men heeft dus

$$\frac{n^2}{(n+1)^2}h^2_n - \frac{1}{(n+1)^2}h^2_n = \frac{(n-1)^2}{n^2}h^2_{n-1},$$

of

$$h^2_n = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}h^2_{n-1}.$$

Uit deze terugloopende betrekking vindt men, wegens $h_1 = a$,

$$h_n = a\sqrt{\frac{n+1}{2n}}.$$

Dus wordt de inhoud van S_n voorgesteld door

$$a \times \tfrac{1}{2}h_2 \times \tfrac{1}{3}h_3 \times \ldots \times \frac{1}{n}h_n = \frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}.$$

De regelmatige 2^n-cel heeft tot hoekpunten de uiteinden der stukken, groot $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, ter weerszijde van den oorsprong uitgezet op de assen van een rechthoekig stelsel.

Voor den inhoud vindt men dus de betrekking

$$I_n = \frac{a\sqrt{2}}{n} I_{n-1}.$$

Hieruit volgt

$$I_n = \frac{\sqrt{2^n}}{n!} a^n.$$

De inhouden van de $(n+1)$-cel, de $2n$-cel en de 2^n-cel verhouden zich dus als

$$\frac{1}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}},\ 1 \text{ en } \frac{\sqrt{2^n}}{n!},$$

of als

$$\sqrt{n+1},\ n!\sqrt{2^n} \text{ en } 2^n.$$

Vraagstuk CLXV.

M¹ 1 b. De kromme

$$(b^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2by)^2(x^2+y^2) = l^2(b^2x^2 + a^2y^2)^2$$

heeft in den oorsprong een viervoudig punt. Welke bijzonderheid vertoont dit punt als men heeft $cl = a^2$ en $c^2 = a^2 - b^2$?

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, Dr. W. BOUWMAN, J. CARDINAAL, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Om de kromme

$$(b^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2by)^2 (x^2 + y^2) = l^2 (b^2x^2 + a^2y^2)^2$$

in de buurt van den oorsprong te onderzoeken, substitueeren we

$$x = my.$$

Na deeling door y^4 (de oorsprong is een viervoudig punt) wordt de vergelijking

$$\{(a^2 + b^2m^2)y - 2a^2b\}^2 (1 + m^2) = l^2 (a^2 + b^2m^2)^2.$$

De raaklijnen in O vindt men door $y = 0$ te stellen, dus uit

$$4a^4b^2(1 + m^2) = l^2 (a^2 + b^2m^2)^2.$$

Nu is echter $cl = a^2$ en $c^2 = a^2 - b^2$, dus worden de raaklijnen in O voorgesteld door

$$\{b^2m^2 - (a^2 - 2b^2)\}^2 = 0.$$

Zij vallen dus 2 aan 2 samen.

Beschouwen we de takken waarvoor $m = + \dfrac{\sqrt{a^2 - 2b^2}}{b} = m_1$ is, die dus raken aan de lijn $x = m_1y$.

De vergelijking tusschen y en m is

$$a^4\{b^2m^2-(a^2-2b^2)\}^2-(1+m^2)(a^2-b^2)(a^2+b^2m^2)y\{(a^2+b^2m^2)y-4a^2b\}=0.$$

Substitueeren we hierin $m = m_1 + \varepsilon$ en verwaarloozen we steeds termen die klein zijn ten opzichte van andere termen als y en ε klein zijn, dan vinden we

$$a^4 (2b^2m_1\varepsilon)^2 + 4a^2b (a^2 - b^2) (1 + m_1^2) (a^2 + b^2m_1^2) y = 0,$$

of daar $b^2m_1^2 = a^2 - 2b^2$ is,

$$a^2b^3 (a^2 - 2b^2) \varepsilon^2 + 2 (a^2 - b^2)^3 y = 0.$$

Hieruit vinden we

$$\varepsilon = \pm \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{a^2 - 2b^2}} \cdot \left\{\frac{a^2 - b^2}{+b}\right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{-y}.$$

De tak die de lijn $y = m_1x$ aanraakt, heeft derhalve de volgende reeksontwikkeling

$$x = \frac{1}{b} \sqrt{a^2 - 2b^2} \,.\, y + \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{a^2 - 2b^2}} \left(\frac{a^2 - b^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} (-y)^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

We hebben dus met een combinatie van twee keerpunten te doen. De takken zijn bestaanbaar als men heeft $a^2 > 2b^2$. Onderstellen we b positief, dan liggen de beide keertakken aan den kant van de negatieve Y-as; zij zijn elkaars spiegelbeelden ten opzichte van de Y-as; trouwens de geheele kromme is symmetrisch ten opzichte van de Y-as.

Wordt $a^2 = 2b^2$ en dus $l = 2b$, dan vallen de raaklijnen van beide keerpunten in de Y-as samen. Beide keerpunten vereenigen zich dan tot een singulariteit van hoogere orde.

De ontwikkeling voor dien tak is

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{b}}\, y^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

Vraagstuk CLXVI.

R 1 b. Een driehoek ABC beweegt zich zoodanig dat het hoekpunt A een rechte a, het hoekpunt B een rechte b doorloopt, terwijl het hoekpunt C op een vlak γ blijft. Men verlangt de hoofdas der beweging te construeeren voor een gegeven stand van den driehoek. (J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN, J. CARDINAAL, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF, F. SCHUH, Dr. C. STOLP *en* B. J. VAN TROTSENBURG.

Oplossing *van* Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF.

Wij kunnen dit vraagstuk oplossen door middel van de theorie der schroeven van BALL.

Als wij de voorwaarde weglaten, dat C in het vlak γ blijft, heeft de driehoek 2 graden van vrijheid, en is de meetkundige plaats van de schroefassen derhalve een cylindroïde. De lijn AB is een van de assen met parameter 0; de andere is de snijlijn s_b van de vlakken door A en door B achtereenvolgens loodrecht op a en b geplaatst. De cylindroïde is nu volkomen bekend; haar dubbellijn is de gemeenschappelijke loodlijn l_c van AB en s_c.

Als de driehoek zich beweegt volgens een van de schroeven van deze cylindroïde, blijft C altijd in het vlak γ', dat loodrecht is op de doorsnede van het vlak door C en AB en het vlak

door C en s_c. Daar nu C ook in het vlak γ moet blijven, geschiedt de beweging van C volgens de doorsnede c van γ en γ'.

Als wij nu de voorwaarde weglaten, dat B de lijn b beschrijft, hebben wij weer een beweging met 2 graden van vrijheid en de cylindroïde, die deze beweging bepaalt, heeft tot schroeven met parameter 0 de lijn AC en de snijlijn s_b der vlakken door A en C loodrecht op a en c. De gemeenschappelijke loodlijn l_b van AC en s_b is de dubbellijn van deze cylindroïde.

De hoofdas, die wij zoeken, is de gemeenschappelijke loodlijn van l_b en l_c.

Daar de beweging volkomen bepaald is, wordt deze loodlijn ook rechthoekig gesneden door de dubbellijn l_a van de cylindroïde, welke de beweging bepaalt, als wij de voorwaarde weglaten, dat A de lijn a beschrijft.

Oplossing *van* F. Schuh.

Om de snelheden van A, B en C te vinden, maken we gebruik van de stelling dat de componenten van de snelheden van twee punten A en B in de richting AB voor beide punten even groot zijn.

We nemen nu de component langs AB der snelheden in A en B willekeurig aan en construeeren daaruit de snelheden van A en B Uit de snelheid in A leidt men de component langs AC der snelheden in A en C af en uit de snelheid in B de component langs BC van de snelheden in B en C. Van de snelheid in C kent men dus de componenten in de richtingen AC en BC, en daar we weten dat de snelheid van C in een vlak γ ligt, kan deze snelheid bepaald worden.

Nu de snelheden in A, B en C bekend zijn, brengen we hun vectoren over naar een zelfde punt, waarvoor we C kunnen kiezen. Door de uiteinden van die vectoren brengen we een vlak; dan geeft de loodlijn uit C op dat vlak neergelaten in grootte en richting de translatie der schroefbeweging aan. Deze translatie trekken we af van de snelheidscomponenten in A, B en C, dan blijven de rotatiecomponenten dier snelheden over. Om de schroefas te vinden hebben we dan nog slechts door A, B en C vlakken aan te brengen loodrecht op die rotatiecomponenten; hun snijlijn is de hoofdas der beweging. De

grootte der rotatiesnelheid vindt men b.v. uit de snelheid in A en den afstand van A tot de schroefas.

Men kan de constructie vereenvoudigen door bij het begin de snelheidsvectoren van A en B naar C over te brengen. We trekken door C een lijn evenwijdig aan AB, waarop we, met C als oorsprong, een willekeurigen vector uitzetten. Door het uiteinde van dien vector brengen we een vlak loodrecht op AB, dat de lijnen door C evenwijdig aan a en b in D en E snijdt; dan geven CD en CE de snelheden in A en B aan. Door D brengen we nu een vlak loodrecht op AC en door E een vlak loodrecht op BC; deze beide vlakken snijden γ in een punt F; CF is dan de snelheid van C. Brengen we nu een vlak door D, E en F, dan geeft de loodlijn CG uit C op dat vlak in grootte en richting de translatie der schroefbeweging aan. (G is het snijpunt van die loodlijn met het vlak DEF). De rotatiecomponenten der snelheden in A, B en C worden dus door de vectoren GD, GE en GF voorgesteld. We brengen nu door A, B en C vlakken loodrecht op GD, GE en GF; deze vlakken snijden elkaar volgens de hoofdas der beweging.

Oplossing *van* J. CARDINAAL.

Houdt men in het oog dat de punten van het bewegende stelsel met de normaalvlakken hunner banen een nulstelsel vormen, dan komt men tot de volgende constructie.

Breng door A een vlak α loodrecht op a, door B een vlak β loodrecht op b en trek door C de loodlijn c op γ. Bepaal de snijpunten A′ en B′ van c met α en β. Construeer de snijlijn s der vlakken β en (cA). Verbind A′ met B. Construeer de lijn l, die AB en $\alpha\beta$ loodrecht snijdt en de lijn l', die A′B en s loodrecht snijdt. De lijn, die l en l' loodrecht snijdt, is de gevraagde hoofdas.

Vraagstuk CLXVII.

L² 17 h. Een bundel quadratische oppervlakken is bepaald door twee concentrische oppervlakken, waarvan het eene een omwentelingsoppervlak is. Bepaal de meetkundige plaats der hoofdassen van de oppervlakken in dien bundel. (J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, J. CARDINAAL, F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

De vergelijkingen, dienende voor de bepaling der hoofdassen van een quadratisch oppervlak $F = 0$, met het middelpunt in den oorsprong, zijn

$$X = \mu x, \quad Y = \mu y, \quad Z = \mu z,$$

waarin $X = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}$, enz.

Is F een oppervlak van een bundel $F \equiv F_1 + \lambda F_2$, dan heeft men dus de betrekkingen

$$X_1 + \lambda X_2 = \mu x, \quad Y_1 + \lambda Y_2 = \mu y, \quad Z_1 + \lambda Z_2 = \mu z,$$

en men vindt door eliminatie van λ en μ als meetkundige plaats van de hoofdassen den kegel van de derde orde, voorgesteld door

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & x \\ Y_1 & Y_2 & y \\ Z_1 & Z_2 & z \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1).$$

In bijzondere gevallen splitst deze kegel zich in eenvoudiger oppervlakken. Zijn b.v. F_1 en F_2 omwentelingsoppervlakken, dan stelt 1) drie platte vlakken voor, n.l. de twee equatoriale vlakken en het vlak van de twee omwentelingsassen. In ons vraagstuk is slechts één van beide oppervlakken, laat ons zeggen F_2, een omwentelingsoppervlak en geeft de vergelijking 1), behalve het eenige equatorvlak, een quadratischen gelijkzijdigen kegel.

Om voor dit geval de vergelijking zoo eenvoudig mogelijk te maken, nemen wij het equatorvlak van F_2 als XOY-vlak aan en draaien wij daarin het assenkruis zóó, dat de term, die xy bevat uit de vergelijking $F_1 = 0$ verdwijnt. Wij hebben dan

$$F_1 \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + G = 0,$$

$$F_2 \equiv x^2 + y^2 + cz^2 + g = 0,$$

$$X_1 = Ax + Ez, \; Y_1 = By + Dz, \; Z_1 = Ex + Dy + Cz, \; X_2 = x, \; Y_2 = y, \; Z_2 = cz$$

en de vergelijking 1) gaat over in

$$\begin{vmatrix} Ax+Ez & x & x \\ By+Dz & y & y \\ Ex+Dy+Cz & cz & z \end{vmatrix} \equiv (1-c)z\{(A-B)xy-Dxz+Eyz\}=0.$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat de kegel in twee verschillende gevallen overgaat in twee platte vlakken, nl. in het geval $A=B$ en in het geval dat D of E gelijk aan nul is. In 't eerste geval is ook F_1 een omwentelingsoppervlak, in het tweede geval gaat één der hoofdvlakken van F_1 door de omwentelingsas van F_2. Eindelijk wordt onze vergelijking naar behooren een identiteit voor $c=1$. Immers is dan elke rechte, die door het middelpunt gaat, een hoofdas van den tot den bundel behoorenden bol $F_2=0$.

Vraagstuk CLXVIII.

L² 17 h. De basiskromme van een bundel quadratische oppervlakken bestaat uit een willekeurige kegelsnede en een cirkel, die haar in twee punten snijdt. Men vraagt te bewijzen, dat de cyclische vlakken der oppervlakken van dien bundel, die niet met den gegeven cirkel tot hetzelfde stelsel behooren, evenwijdig loopen met een bepaalde rechte. Hoe construeert men deze rechte?

(J. CARDINAAL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, J. CARDINAAL, F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

De gegeven cirkel snijdt de kegelsnede in twee punten P en Q. Een bol, die door dien cirkel gaat, snijdt de kegelsnede nog in twee punten P′ en Q′. De doorsnede van den bol met een willekeurig oppervlak van den bundel bestaat uit twee cirkels, n.l. den gegeven cirkel en een anderen cirkel, die niet tot hetzelfde stelsel behoort en door de punten P′ en Q′ gaat. Het vlak van laatstgenoemden cirkel bevat de rechte P′Q′, terwijl de overige cyclische vlakken van dit stelsel met P′Q′ evenwijdig loopen. Daar van ieder ander oppervlak van den bundel hetzelfde gezegd kan worden, is het gestelde bewezen.

P′Q′ is in het vlak der kegelsnede te construeeren als een rechte, die met betrekking tot de assen antiparallel met PQ

loopt. Om dit in te zien kieze men als middelpunt van den bol het snijpunt van de as des gegeven cirkels met een der twee vlakken van symmetrie der kegelsnede. Met betrekking tot dit vlak worden dan P′ en Q′ de spiegelbeelden van P en Q en ligt de rechte P′Q′ symmetrisch met PQ ten opzichte van één der assen van de kegelsnede.

De constructie is even goed uitvoerbaar, wanneer de punten P en Q onbestaanbaar zijn; want de bestaanbare rechte PQ is de doorsnede van de vlakken der basiskromme.

Vraagstuk CLXIX.

E 5. Men vraagt te bewijzen, dat men heeft

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}\varphi \lg \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{2}{(2p+1)\varepsilon_{2p}}\left(\frac{\pi^2}{4}+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\ldots+\varepsilon_{2p}^2\right),$$

waar

$$\varepsilon_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1\,.\,3\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\ldots\quad 2n}\,.\,\frac{\pi}{2} \text{ is.}$$

(Dr. W. Kapteyn.)

Opgelost *door* C. van Aller, Dr. W. Kapteyn *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* C. van Aller.

Stelt men

$$f_{2p+1}(\phi) = \int \sin^{2p+1}\phi \lg \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\, d\phi,$$

dan is

$$f_{2p+1}(\phi) = f_{2p-1}(\phi) - \frac{1}{2p}\int \cos\phi \lg \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\, d(\sin^{2p}\phi) =$$

$$= f_{2p-1}(\phi) - \frac{1}{2p}\sin^{2p}\phi\cos\phi \lg\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} - \frac{1}{2p} f_{2p+1}(\phi) + \frac{1}{p}\int \sin^{2p}\phi\, d\phi,$$

waaruit volgt

$$f_{2p+1}(\phi) = \frac{2p}{2p+1} f_{2p-1}(\phi) - \frac{1}{2p+1}\sin^{2p}\phi\cos\phi \lg\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} + \frac{2}{2p+1}\int \sin^{2p}\phi\, d\phi$$

Als men nog stelt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}\phi \lg \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\, d\phi = A_{2p+1},$$

dan is dus

$$A_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} A_{2p-1} + \frac{2}{2p+1} \varepsilon_{2p}.$$

Hieruit volgt

$$A_{2p+1} = \frac{2}{2p+1}\varepsilon_{2p} + \frac{2p}{2p+1}\cdot\frac{2}{2p-1}\varepsilon_{2p-2} + \frac{2p(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)}\cdot\frac{2}{2p-3}\varepsilon_{2p-4} +$$

$$+ \ldots + \frac{2p(2p-2)\ldots 2}{(2p+1)(2p-1)\ldots 3} \times \frac{2}{1}\varepsilon_0 =$$

$$= \frac{2}{2p+1}\left\{\varepsilon_{2p} + \frac{2p}{2p-1}\varepsilon_{2p-2} + \frac{2p(2p-2)}{(2p-1)(2p-3)}\varepsilon_{2p-4} + \right.$$

$$\left. + \ldots \frac{2p(2p-2)\ \ldots 2}{(2p-1)(2p-3)\ldots 1}\frac{\pi}{2}\right\} =$$

$$= \frac{2}{2p+1}\left\{\varepsilon_{2p} + \frac{\varepsilon^2_{2p-2}}{\varepsilon_{2p}} + \frac{\varepsilon^2_{2p-4}}{\varepsilon_{2p}} + \ldots + \frac{\pi^2}{4\varepsilon_{2p}}\right\} =$$

$$= \frac{2}{(2p+1)\varepsilon_{2p}}\left\{\frac{\pi^2}{4} + \varepsilon_2{}^2 + \varepsilon_4{}^2 + \ldots \varepsilon^2_{2p}\right\},$$

waarmee het gestelde bewezen is.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

De functie

$$f(\phi) \equiv \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \times \varepsilon_{2n}\sin^{2n}\phi\cos\phi \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

wordt nul voor $\phi = 0$. Schrijft men $\log(1+\sin\phi) - \log\cos\phi$ voor $\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\phi}$, dan zal men, in aanmerking nemende, dat $\lim \cos\phi \log\cos\phi = 0$ voor $\phi = \frac{\pi}{2}$, bevinden, dat ook $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ is. Het differentieeren van 1) gevolgd door een inte-

gratie tusschen de grenzen $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ geeft dus als voorloopige uitkomst

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi}\, d\,(\varepsilon_{2n} \sin^{2n}\phi \cos\phi) +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{2n} \sin^{2n}\phi \cos\phi\, d\left(\tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi}\right).$$

Nu is echter

$$d\,(\varepsilon_{2n} \sin^{2n}\phi \cos\phi) = -(2n + 1)\, \varepsilon_{2n} \sin^{2n+1}\phi\, d\phi + 2n\varepsilon_{2n} \sin^{2n-1}\phi\, d\phi$$

en

$$d\left(\tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi}\right) = \frac{d\phi}{\cos\phi},$$

zoodat de eerste integraal zich laat splitsen in twee andere, terwijl de tweede de waarde ε^2_{2n} verkrijgt. Men heeft dus

$$(n + \tfrac{1}{2})\, \varepsilon_{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\phi \log \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi}\, d\phi -$$

$$- n\varepsilon_{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\phi \log \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi}\, d\phi = \varepsilon^2_{2n},$$

en in het bijzonder geval $n = 0$

$$\tfrac{1}{2}\, \varepsilon_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \log \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi}\, d\phi = \varepsilon_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

Is $n > 0$, dan zal men, volgens de voor ε_{2n} gegeven bepaling, voor den factor $n\varepsilon_{2n}$ van de tweede integraal $(n - \frac{1}{2})\, \varepsilon_{2n-2}$ kunnen schrijven. Doet men dit en geeft men vervolgens aan n de waarden $1, 2, 3 \ldots p$, dan krijgt men p vergelijkingen, die bij 2) opgeteld als uitkomst geven

$$(p + \tfrac{1}{2})\, \varepsilon_{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}\phi \log \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi}\, d\phi = \sum_0^p \varepsilon^2_{2n},$$

wat juist bewezen moest worden.

Vraagstuk CLXX.

E 5. Aan te toonen, dat de grootheden ε_{2n} (zie het vorige vraagstuk) voldoen aan de betrekking

$$\frac{\pi^2}{4} + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \ldots + \varepsilon_{2p}^2 =$$

$$= (2p+1)\,\varepsilon_{2p}\left(\frac{1}{2p+1}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2p-1} + \frac{\varepsilon_4}{2p-3} + \ldots + \varepsilon_{2p}\right).$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Opgelost *door* Dr. W. KAPTEYN *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

De juistheid van de vergelijking voor $p = 0$ blijkt door substitutie van deze waarde. Wanneer wij dus het tweede lid kortheidshalve door $F(p)$ voorstellen, weten wij reeds, dat $F(0) = \frac{\pi^2}{4}$ is, en blijft over te bewijzen, dat men heeft

$$F(p) - F(p-1) = \varepsilon^2_{2p}.$$

Wanneer men de twee identieke vergelijkingen

$$(2p+1)\,\varepsilon_{2n} = (2p-2n+1)\,\varepsilon_{2n} + 2n\,\varepsilon_{2n},$$

$$2p\,\varepsilon_{2n-2} = (2p-2n+1)\,\varepsilon_{2n-2} + (2n-1)\,\varepsilon_{2n-2}$$

van elkaar aftrekt en daarbij let op de betrekking $2n\,\varepsilon_{2n} = (2n-1)\,\varepsilon_{2n-2}$, vindt men

$$(2p+1)\,\varepsilon_{2n} - 2p\,\varepsilon_{2n-2} = (2p-2n+1)\,(\varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n-2}).$$

Vermenigvuldigt men beide leden dezer vergelijking met $\varepsilon_{2p} : (2p-2n+1)$ en vervangt men vervolgens in het eerste lid het product $2p\,\varepsilon_{2p}$ door $(2p-1)\,\varepsilon_{2p-2}$, dan komt er

$$\frac{(2p+1)\,\varepsilon_{2p}\,\varepsilon_{2n}}{2p-2n+1} - \frac{(2p-1)\,\varepsilon_{2p-2}\,\varepsilon_{2n-2}}{2p-2n+1} = \varepsilon_{2p}\,\varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2p}\,\varepsilon_{2n-2}.$$

Geeft men nu aan n achtereenvolgens de waarden $1, 2, 3, \ldots p$, en telt men de daardoor verkregen vergelijkingen bij elkaar op, dan krijgt men

$$(2p+1)\,\varepsilon_{2p}\left(\frac{\varepsilon_2}{2p-1}+\frac{\varepsilon_4}{2p-3}+\frac{\varepsilon_6}{2p-5}+\ldots+\varepsilon_{2p}\right)-$$

$$-(2p-1)\varepsilon_{2p-2}\left(\frac{\varepsilon_0}{2p-1}+\frac{\varepsilon_2}{2p-3}+\frac{\varepsilon_4}{2p-5}+\ldots+\varepsilon_{2p-2}\right)=\varepsilon^2_{2p}-\varepsilon_{2p}\,\varepsilon_0.$$

Telt men hierbij nog op

$$(2p+1)\,\varepsilon_{2p}\times\frac{\varepsilon_0}{2p+1}=\varepsilon_{2p}\,\varepsilon_0,$$

dan heeft men ten slotte

$$F(p)-F(p-1)=\varepsilon^2_{2p}.$$

Vraagstuk CLXXI.

H 5 j α. Aan welke voorwaarden moeten de coëfficienten der lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)\,y=0$$

voldoen, zal het mogelijk zijn haar door een substitutie $x=\varphi(t)$ te herleiden tot de differentiaalvergelijking van BESSEL

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+y=0.$$

(Dr. W. KAPTEYN.)

Oplossing *van* Dr. W. KAPTEYN, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF *en* F. SCHUH.

In de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)\,y=0$$

substitueeren we $x=\phi(t)$ of

$$t=\psi(x).$$

Dan is

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\psi' \text{ en}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dt}\psi''+\frac{d^2y}{dt^2}\psi'^2.$$

De differentiaalvergelijking wordt door die substitutie:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\,\frac{\psi'' + P(x)\psi'}{\psi'^2} + y\,\frac{Q(x)}{\psi'^2} = 0.$$

Dit wordt de differentiaalvergelijking van BESSEL,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\,\frac{dy}{dt} + y = 0,$$

als voldaan is aan

$$\frac{\psi'' + P(x)\psi'}{\psi'^2} = \frac{1}{\psi} \text{ en } \frac{Q(x)}{\psi'^2} = 1.$$

Hieruit vindt men achtereenvolgens

$$\psi' = \sqrt{Q(x)}, \qquad \psi'' = \frac{Q'(x)}{2\sqrt{Q(x)}},$$

en

$$\psi = \frac{2\sqrt{Q^3}}{Q' + 2PQ}.$$

De herleiding tot de differentiaalvergelijking van BESSEL is nu mogelijk als het differentiaalquotient van de uitdrukking voor ψ naar x de functie $\sqrt{Q(x)}$ oplevert; dus als men heeft

$$\frac{3(Q' + 2PQ)Q'\sqrt{Q} - 2(Q'' + 2P'Q + 2PQ')\sqrt{Q^3}}{(Q' + 2PQ)^2} = \sqrt{Q}$$

of

$$\frac{3Q'^2 + 2PQQ' - 2QQ'' - 4P'Q^2}{(Q' + 2PQ)^2} = 1$$

of

$$QQ'' - Q'^2 + PQQ' + 2P'Q^2 + 2P^2Q^2 = 0.$$

Dit is dus de gevraagde voorwaarde.

OPMERKING. De gevonden betrekking kan geschreven worden in den vorm

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Q'}{Q}\right) + P\left(\frac{Q'}{Q}\right) + 2(P^2 + P') = 0.$$

Hieruit vindt men de functie Q, als P een gegeven functie is. Voor $P = 0$ wordt $Q = e^{cx+c'}$, welk voorbeeld voorkomt in LOMMEL, *Besselsche Functionen*, bl. 120 (W. K.).

Vraagstuk CLXXII.

I 9 b. Men beschouwt de ν priemgetallen, die kleiner zijn dan de wortel uit een gegeven getal N, het product n dier priemgetallen, de deelers d van n, het aantal μ_d der priemfactoren van den deeler d en het aantal $\left[\frac{N}{d}\right]$ der geheelen van het quotient $N : d$. Het aantal priemgetallen beneden N wordt dan uitgedrukt door

$$\nu - 1 + \sum_{d=1}^{d=n} (-1)^{\mu_d} \left[\frac{N}{d}\right].$$

Men vraagt deze door KRONECKER gegeven formule te bewijzen.

(Dr. J. C. KLUYVER.)

Oplossing *van* E. D. J. DE JONGH Jr.

Om de priemgetallen beneden N te vinden, moeten we in de eerste plaats van de $N - 1$ getallen

$$2, 3, 4, \ldots . N$$

afnemen de veelvouden van 2, met uitzondering van 2 zelf. Het aantal dezer getallen is

$$\left[\frac{N}{2}\right] - 1.$$

We schrijven hiervoor kortheidshalve $a - 1$.

Er blijven dan over

$$N - 1 - (a - 1)$$

getallen, die geen van alle door 2 deelbaar zijn, behalve 2 zélf.

Van deze moeten afgenomen worden de getallen beneden N, die door 3 en niet tevens door 2 deelbaar zijn, met uitzondering van 3 zelf. Aan de eerste voorwaarde voldoen, behalve het getal 3, $\left[\frac{N}{3}\right] - 1$ getallen; daar zich hieronder nog $\left[\frac{N}{2 . 3}\right]$ tweevouden bevinden, is het aantal der bedoelde getallen

$$\left[\frac{N}{3}\right] - \left[\frac{N}{2 . 3}\right] - 1 \quad \text{of } b - 1.$$

Er blijven dus over

$$N - 1 - (a - 1) - (b - 1)$$

getallen, die noch door 2, nog door 3 deelbaar zijn, behalve 2 en 3 zelf.

Van deze getallen moeten we afnemen de getallen beneden N, die door 5 en niet tevens door 2 of 3 deelbaar zijn, behalve 5 zelf. Aan de eerste voorwaarde voldoen, buiten het getal 5, $\left[\frac{N}{5}\right] - 1$ getallen. Hieronder bevinden zich echter nog getallen, die door 2 of 3 deelbaar zijn, nl. vijfvouden, die reeds voorkomen onder de met a aangeduide tweevouden, ten getale van $\left[\frac{N}{2.5}\right]$ en onder de met b aangeduide drievouden ten getale van $\left[\frac{N}{3.5}\right] - \left[\frac{N}{2.3.5}\right]$, samen

$$\left[\frac{N}{2.5}\right] + \left[\frac{N}{3.5}\right] - \left[\frac{N}{2.3.5}\right] \text{ getallen.}$$

Het aantal getallen, die van de overgeblevene afgenomen moeten worden, bedraagt dus

$$\left[\frac{N}{5}\right] - \left[\frac{N}{2.5}\right] - \left[\frac{N}{3.5}\right] + \left[\frac{N}{2.3.5}\right] - 1 \text{ of } c - 1.$$

Er blijven dan over

$$N - 1 - (a - 1) - (b - 1) - (c - 1)$$

of

$$3 - 1 + \left[\frac{N}{1}\right] - \left[\frac{N}{2}\right] - \left[\frac{N}{3}\right] - \left[\frac{N}{5}\right] + \left[\frac{N}{2.3}\right] + \left[\frac{N}{2.5}\right] + \left[\frac{N}{3.5}\right] - \left[\frac{N}{2.3.5}\right]$$

getallen.

Op volkomen dezelfde wijze kunnen we voortgaan met de volgende priemgetallen, tot we het laatste van de ν priemgetallen gebruikt hebben en hiermede is de bewerking geëindigd. Immers, verondersteld, dat p het $(\nu + 1)$ste priemgetal ware en we wilden de veelvouden van p verwijderen, dan zouden we moeten beginnen met p^2. Daar echter $p^2 > N$ is, zijn er geen getallen meer te verwijderen, zoodat, blijkens bovenstaande handelwijze, het aantal priemgetallen beneden N gelijk is aan

$$\nu - 1 + \sum_{d=1}^{d=N} (-1)^{\mu_d} \left[\frac{N}{d}\right].$$

Oplossing *van* Dr. J. C. Kluyver.

Men heeft

$$\prod_{p<\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\sum_{d=1}^{d=n}\frac{(-1)^{\mu_d}}{d^s},$$

$$\zeta(z)=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{\prod\left(1-\frac{1}{p^s}\right)},$$

en derhalve

$$\zeta(z)\times\prod_{p<\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\frac{1}{\prod\limits_{p>\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^s}\times\sum_{d=1}^{d=n}\frac{(-1)^{\mu_d}}{d^s},$$

of

$$\frac{1}{\prod\limits_{p>\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}=\prod_{p>\sqrt{N}}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{d=1}^{d=n}(-1)^{\mu_d}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(kd)^s}.$$

Men maakt thans gebruik van onderstaande integraalformule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{a^s}{z}\,dz=\begin{cases}1 & \text{voor} \quad a>1\\ \frac{1}{2} & \text{,,} \quad a=1\\ 0 & \text{,,} \quad a<1;\end{cases}$$

de integratieweg is een lijn, op kleinen afstand δ van de as der imaginairen rechts daarvan evenwijdig aan die as getrokken.

Men heeft

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{N^s}{z}\prod_{p>\sqrt{N}}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots\right)dz=$$

$$=\sum_{d=1}^{d=n}(-1)^{\mu_d}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{\left(\frac{N}{kd}\right)^s}{z}\,dz.$$

Rechts heeft bij gegeven d de integraal alleen dan de waarde één, als k kleiner is dan $\frac{N}{d}$. Alzoo is

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{N}{kd}\right)^s}{z} dz = \left[\frac{N}{d}\right].$$

Links heeft men integralen van den vorm

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{dz}{z} \times \left(\frac{N}{p_1{}^{\alpha} p_2{}^{\beta} \ldots}\right)^s;$$

daar echter de tweede machten $p_1{}^2$, $p_2{}^2$, ..., of ook de produkten p_1p_2, p_1p_3, ... reeds grooter zijn dan N, is de overgroote meerderheid der integralen in het linkerlid nul. Er blijft alleen over

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{N^s}{z} \left(1 + \sum_{p>\sqrt{N}} \frac{1}{p^s}\right) dz,$$

welke integraal blijkbaar gelijk is aan de eenheid, vermeerderd met het aantal priemgetallen grooter dan $\sqrt{N}$ maar kleiner dan N. Gelijkstelling van beide leden geeft dus voor het aantal priemgetallen kleiner dan n

$$\nu - 1 + \sum_{d=1}^{d=n} (-1)^{\mu_d} \left[\frac{N}{d}\right],$$

wat te bewijzen was. Ondersteld is, dat noch N, noch $\sqrt{N}$ priemgetallen zijn. Voorbeeld: $N = 20$, $n = 2 \times 3$, $d = 1, 2, 3, 6$, $\nu = 2$.

Het aantal priemgetallen beneden 20 is

$$2 - 1 + \left\{\left[\frac{20}{1}\right] - \left[\frac{20}{2}\right] - \left[\frac{20}{3}\right] + \left[\frac{20}{6}\right]\right\} = 2 - 1 + \{20 - 10 - 6 + 3\} = 8.$$

De priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Vraagstuk CLXXIII.

D 6 1. Als men door $\zeta(n)$ aanduidt de waarde der reeks $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots (n > 1)$, vraagt men te bewijzen

$$4[\zeta(3) - 1] = 4[\zeta(5) - 1] + 10[\zeta(6) - 1] + \ldots + \\ + (n-4)(n-1)[\zeta(n) - 1] + \ldots.$$

(Dr. J. C. KLUYVER.)

Opgelost *door* E. D. J. DE JONGH Jr., Dr. J. C. KLUYVER *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* E. D. J. DE JONGH JR.

Men heeft

$$4[\zeta(5)-1] + 10[\zeta(6)-1] + \ldots + (n-4)(n-1)[\zeta(n)-1] + \ldots \equiv$$

$$\equiv 4\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \ldots + \frac{1}{k^5} + \ldots\right) +$$

$$+ 10\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots + \frac{1}{k^6} + \ldots\right) +$$

$$+ 18\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \ldots + \frac{1}{k^7} + \ldots\right) + \ldots\ldots +$$

$$+ (n-4)(n-1)\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots + \frac{1}{k^n} + \ldots\right) + \ldots =$$

$$= \left[\frac{4}{2^5} + \frac{10}{2^6} + \frac{18}{2^7} + \ldots + \frac{(n-4)(n-1)}{2^n} + \ldots\right] +$$

$$+ \left[\frac{4}{3^5} + \frac{10}{3^6} + \frac{18}{3^7} + \ldots + \frac{(n-4)(n-1)}{3^n} + \ldots\right] +$$

$$+ \left[\frac{4}{k^5} + \frac{10}{k^6} + \frac{18}{k^7} + \ldots + \frac{(n-4)(n-1)}{k^n} + \ldots\right] + \ldots \equiv$$

$$\equiv S_2 + S_3 + S_4 + \ldots + S_k + \ldots.$$

Hierin is

$$S_k \equiv \frac{4}{k^5} + \frac{10}{k^6} + \frac{18}{k^7} + \ldots = \frac{2(2k-1)}{(k-1)^3 k^3} =$$

$$= 2\left[\frac{1}{(k-1)^3} + \frac{1}{k^3}\right] - 2\left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right].$$

Derhalve wordt

$$S_2 + S_3 + S_4 + \ldots = 2 + 4\left[\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right] -$$

$$- 2\left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots\right] =$$

$$= 4\left[\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right].$$

Dus is

$$4[\zeta(3) - 1] = 4[\zeta(5) - 1] + 10[\zeta(6) - 1] + 18[\zeta(7) - 1] + \ldots.$$

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

Uit de binomiale ontwikkeling

$$(a-1)^{-s} = a^{-s} + \frac{s}{1} a^{-s-1} + \frac{s(s+1)}{1\,.\,2} a^{-s-2} + \text{enz.}$$

leidt men, door den eersten term van het tweede lid in het eerste over te brengen en dan achtereenvolgens $a = 2, 3, 4$, enz. te stellen, de volgende vergelijkingen af

$$1 - \frac{1}{2^s} = \frac{s}{1}\frac{1}{2^{s+1}} + \frac{s(s+1)}{1\,.\,2}\frac{1}{2^{s+2}} + \text{enz.}$$

$$\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} = \frac{s}{1}\frac{1}{3^{s+1}} + \frac{s(s+1)}{1\,.\,2}\frac{1}{3^{s+2}} + \text{enz.}$$

$$\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} = \frac{s}{1}\frac{1}{4^{s+1}} + \frac{s(s+1)}{1\,.\,2}\frac{1}{4^{s+2}} + \text{enz.}$$

Door optelling vindt men uit deze vergelijkingen

$$1 = \frac{s}{1}[\zeta(s+1) - 1] + \frac{s(s+1)}{1\,.\,2}[\zeta(s+2) - 1] + \text{enz.}$$

Voor $s = 2$ en $s = 3$ vindt men hieruit

$$1 = 2[\zeta(3) - 1] + 3[\zeta(4) - 1] + 4[\zeta(5) - 1] + \ldots + (n-1)[\zeta(n) - 1] + \text{enz.}$$

$$1 = \qquad 3[\zeta(4) - 1] + 6[\zeta(5) - 1] + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}[\zeta(n) - 1] + \text{enz.}$$

Trekt men de bovenste dezer vergelijkingen af van de

onderste, dan vindt men, na vermenigvuldiging van alle termen met 2,

$$0 = -4[\zeta(3) - 1] + 4[\zeta(5) - 1] + 10[\zeta(6) - 1] + \ldots + \\ + (n-4)(n-1)[\zeta(n) - 1] + \text{enz.}$$

Vraagstuk CLXXIV.

D 6 i. Men vraagt te bewijzen, dat men heeft

$$\zeta'(s) = \int_0^\infty \left[\frac{\zeta(s)}{(1+z)^s} - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(z+k)^s}\right],$$

waar $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$ is.

(Dr. J. C. Kluyver.)

Oplossing *van* Dr. J. C. Kluyver.

Men kan de functie achter het integraalteeken in termen splitsen en term voor term integreeren. Op deze wijze wordt het rechterlid een som met den algemeenen term

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[\frac{1}{k^s(1+z)^s} - \frac{1}{(z+k)^s}\right].$$

Deze term kan als volgt vervormd worden

$$\lim_{\delta=0}\int_\delta^\infty \frac{dz}{z}\left[\frac{1}{k^s(1+z)^s} - \frac{1}{(z+k)^s}\right] = \lim_{\delta=0}\int_\delta^\infty \frac{dz}{zk^s(1+z)^s} - \\ - \lim_{\delta=0}\int_{\frac{\delta}{k}}^\infty \frac{dy}{yk^s(1+y)^s} = -\lim_{\delta=0}\int_{\frac{\delta}{k}}^\delta \frac{dz}{zk^s(1+z)^s} = -\frac{1}{k^s}\log k$$

Alle termen uit het rechterlid geven dus te zamen

$$-\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\log k}{k^s},$$

en dit is juist de afgeleide functie $\zeta'(s)$.

Vraagstuk CLXXV.

K 4. Door een punt M, waarvan de barycentrische coördinaten α, β, γ ten opzichte van een driehoek ABC bekend zijn, trekt men rechten evenwijdig aan de zijden van ABC. Men vraagt den driehoek te construeeren als men, behalve α, β, γ, de stukken m, n, p kent, welke telkens door twee zijden worden afgesneden van de rechte, die evenwijdig is met de derde zijde. (J. NEUBERG.)

Oplossing *van* J. A. BARRAU, Dr. W. BOUWMAN, Dr. A. J. A. PRANGE, F. SCHUH *en* B. J. VAN TROTSENBURG.

Zijn x, y, z de loodlijnen uit P op de zijden a, b, c van den driehoek en h_a, h_b, h_c de hoogtelijnen, dan vindt men terstond uit gelijkvormige driehoeken

$$m : a = (h_a - x) : h_a.$$

Daar nu $\alpha = \frac{1}{2} ax$ en $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} ah_a$ is, heeft men $m : a = (\beta + \gamma) : (\alpha + \beta + \gamma)$, dus

$$a = \frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma} m.$$

De zijden van den driehoek zijn dus gemakkelijk te construeeren.

Vraagstuk CLXXVI.

P 1 e. A_1, A_2, A_3, A_4 zijn overeenkomstige punten van vier in een vlak gelegen rechtstreeks gelijkvormige stelsels. Men vraagt naar de meetkundige plaats van A_1, als aan een der volgende voorwaarden is voldaan:

a) de rechten A_1A_2 en A_3A_4 zijn evenwijdig;

b) de verhouding der stukken A_1A_2 en A_3A_4 is standvastig;

c) de punten A_1, A_2, A_3, A_4 liggen op één cirkel.

(J. NEUBERG.)

Oplossing *van* Dr. W. BOUWMAN.

a) Worden vier overeenkomstige punten door (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) aangewezen, dan wordt de gelijkvormige

verwantschap uitgedrukt door betrekkingen van den vorm

$$\left.\begin{array}{c} x_k = a_k x + b_k y + c_k, \\ y_k = d_k x + e_k y + f_k, \\ (k = 1, 2, 3), \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

mits de coëfficienten nog aan de volgende voorwaarden voldoen

$$\left.\begin{array}{c} a_k^2 + d_k^2 = b_k^2 + e_k^2 = a_k e_k - b_k d_k, \\ a_k b_k + d_k e_k = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2).$$

De verbindingslijn van (x, y) met (x_1, y_1) loopt evenwijdig aan de verbindingslijn van (x_2, y_2) met (x_3, y_3), als voldaan is aan

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}.$$

De m.pl. van (x, y) is dus de kegelsnede, voorgesteld door

$$[(a_1 - 1)x + b_1 y + c_1][d_2 - d_3)x + (e_2 - e_3)y + (f_2 - f_3)] =$$
$$[d_1 x + (e_1 - 1)y + f_1][(a_2 - a_3)x + (b_2 - b_3)y + (c_2 - c_3)].$$

Deze vergelijking wordt niet vereenvoudigd door het bestaan der betrekkingen 2). Men vindt dus ook een kegelsnede, als de gelijkvormige stelsels vervangen worden door affiene stelsels.

Zonder eenige berekening kan men als volgt inzien, dat de gevraagde m.pl. een kegelsnede is.

Als A_1 de rechte a_1 doorloopt, omhullen A_1A_2 en A_3A_4 elk een parabool. De puntenreeksen, welke A_1A_2 en A_3A_4 daarbij op de oneindig ver gelegen rechte insnijden, zijn projectief, zoodat A_1A_2 tweemaal evenwijdig wordt met A_3A_4. Bijgevolg heeft de gevraagde m.pl. twee punten gemeen met de rechte a_1.

b) De verhouding der stukken A_1A_2 en A_3A_4 is standvastig en gelijk aan k, als voldaan wordt aan

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = k^2[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2].$$

Door gebruik te maken van de vergelijkingen onder 1) vindt men ook hier de vergelijking van een kegelsnede, die niet vereenvoudigd wordt door de betrekkingen onder 2).

c) De voorwaarde dat de vier punten op een cirkel liggen, wordt uitgedrukt door

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Met behulp van de betrekkingen onder 1) vindt men hieruit voor de m.pl. van A_1 een kromme van den vierden graad.

Vraagstuk CLXXVII.

Q 2. In een ruimte R_n zijn n door een punt O gaande rechten $OX_i (i = 1, 2, \ldots n)$ gegeven, die twee aan twee denzelfden hoek λ met elkaar vormen. Te bewijzen, dat er een rechte OP is te vinden, die met al deze lijnen een hoek α maakt, bepaald door

$$n \cos^2 \alpha = (n-1) \cos \lambda + 1.$$

(Dr. P. H. SCHOUTE.)

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

Past men van O op elk der rechten een stuk gelijk aan de eenheid af, dan zijn alle afstanden a tusschen de uiteinden der stukken onderling gelijk, namelijk

$$a = 2 \sin \tfrac{1}{2} \lambda.$$

Daar deze hoekpunten in eene R_{n-1} een n-cel met gelijke ribben vormen, is deze regelmatig.

Hare hoogte is (vergelijk n°. 164)

$$h_{n-1} = a \sqrt{\frac{n}{2(n-1)}}.$$

Laten we uit O eene loodlijn OP neer op de R_{n-1} dier cel en verbinden we P met een willekeurig hoekpunt A der cel, dan is

$$PA = \frac{n-1}{n} h_{n-1} = a \sqrt{\frac{n-1}{2n}}.$$

Alle driehoeken OPA zijn nu congruent en rechthoekig, dus voldoet OP aan het gevraagde en is, voor $\angle POA = \angle \alpha$,

$$\sin \alpha = \frac{PA}{OA} = a \sqrt{\frac{n-1}{2n}} = 2 \sin \tfrac{1}{2} \lambda \sqrt{\frac{n-1}{2n}},$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{2(n-1)}{n}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda,$$

$$n\cos^2\alpha = (n-1) - 2(n-1)\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda + 1,$$

$$n\cos^2\alpha = (n-1)\cos\lambda + 1.$$

OPMERKING. Een andere oplossing komt voor in Dr. P. H. SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie*, deel I, blz. 128. (RED.)

Vraagstuk CLXXVIII.

Q 2. Bepaal den hoek tusschen de rechte en de ruimte, die, in een R_5, op rechthoekige assen worden voorgesteld door de stelsels

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 \text{ en}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= kx_3 + x_4 + x_5 \\ x_2 &= x_3 + kx_4 + x_5 \end{aligned}\right\}$$

(Dr. P. H. SCHOUTE.)

Oplossing *van* J. A. BARRAU.

Neem op de rechte een punt $P \equiv \{1, 1, 1, 1, 1\}$, dan is $OP = \sqrt{5}$. Laat uit P het loodrechte vlak op de R_3 neer. Dit vlak moet de beide rechten bevatten, die achtereenvolgens loodrecht staan op de beide R_4, wier snijding R_3 bepaalt, en wier vergelijkingen zijn

$$x_1 - kx_3 - x_4 - x_5 = 0,$$

en

$$x_2 - x_3 - kx_4 - x_5 = 0.$$

Die rechten hebben dus tot vergelijkingen

$$\frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_3 - 1}{-k} = \frac{x_4 - 1}{-1} = \frac{x_5 - 1}{-1},$$

en

$$\frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 - 1}{-1} = \frac{x_4 - 1}{-k} = \frac{x_5 - 1}{-1}.$$

Om het vlak door die rechten te brengen kiest men op elk een punt, b.v. $\{2, 1, 1-k, 0, 0\}$ en $\{1, 2, 0, 1-k, 0\}$ en bepaalt het vlak door deze twee punten en $\{1, 1, 1, 1, 1\}$.

Aan de algemeene vergelijkingen van het vlak

$$\begin{cases} x_3 = Ax_1 + Bx_2 + C, \\ x_4 = Dx_1 + Ex_2 + F, \\ x_5 = Gx_1 + Hx_2 + I, \end{cases}$$

moet dan door deze coordinaten worden voldaan, waaruit men vindt

$$\begin{cases} x_3 = -kx_1 - x_2 + (k+2), \\ x_4 = -x_1 - kx_2 + (k+2), \\ x_5 = -x_1 - x_2 + 3. \end{cases}$$

Vervolgens bepaalt men het snijpunt Q van dit vlak met de gegeven ruimte door oplossing der gezamenlijke 5 lineaire vergelijkingen. Men vindt

$$x_1 = x_2 = \frac{k^2 + 3k + 5}{k^2 + 2k + 4},$$

$$x_3 = x_4 = \frac{3}{k^2 + 2k + 4},$$

$$x_5 = \frac{k^2 + 2}{k^2 + 2k + 4}.$$

Dus is

$$OQ = \sqrt{\left(\sum_1^5 x^2\right)} = \frac{1}{k^2 + 2k + 4}\sqrt{3k^4 + 12k^3 + 42k^2 + 60k + 72},$$

en

$$\cos\phi = \frac{OQ}{OP} = \frac{\sqrt{\frac{3}{5}(k^4 + 4k^3 + 14k^2 + 20k + 24)}}{k^2 + 2k + 4}.$$

OPMERKING. Men vergelijke Dr. P. H. SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie*, deel I, blz. 174.

Vraagstuk CLXXIX.

R 7 b. Een vrij punt wordt met een standvastige kracht afgestooten door een vast centrum. Men vraagt de beweging te bepalen als de voorwaarde, waaronder ze plaats vindt, dezelfde is als bij de eenparige cirkelbeweging, die het punt kan aannemen, in geval het met dezelfde kracht door het centrum wordt aangetrokken.

(Dr. G. SCHOUTEN.)

Opgelost *door* Dr. G. SCHOUTEN *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* Dr. G. SCHOUTEN.

De beweging moet in een plat vlak geschieden. Zijn r en θ de poolcoördinaten van het bewegend punt op zeker oogenblik t van de beweging, met het centrum tot oorsprong, dan geeft het beginsel van de sectoren de differentiaalvergelijking

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

waarin $\frac{1}{2}$ C het oppervlak van den sector is, door den voerstraal in de eenheid van tijd beschreven.

Het beginsel van arbeidsvermogen levert, als de massa van 't punt gelijk aan één gesteld wordt, de vergelijking

$$v^2 = 2U + h,$$

waar $v^2 = \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ het kwadraat is van de snelheid, U de krachtfunctie en h een standvastige.

Worden uit deze beide vergelijkingen $\frac{dr}{dt}$ en $\frac{dr}{d\theta}$ opgelost, dan vindt men

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{r}\sqrt{(2U+h)r^2 - C^2} \\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{r}{C}\sqrt{(2U+h)r^2 - C^2} \end{aligned}\right\}$$

In ons geval is $U = \alpha r$, als α de standvastige kracht is. $(2U + h)r^2 - C^2$ gaat dus hier over in $2\alpha r^3 + hr^2 - C^2$.

Deze vorm moet nu voortdurend gelijk aan nul zijn, ingeval de cirkelbeweging plaats grijpt. Omdat nu voor $\alpha < 0$

$$2\alpha r^3 + hr^2 - C^2 = 0$$

een negatieven wortel heeft, en de beide andere wortels niet complex mogen zijn, aangezien dan het eerste lid dezer vergelijking standvastig negatief zoude wezen, moeten deze wortels noodzakelijk positief zijn. Voor het voortdurend nul zijn van het eerste lid is dan noodig, dat deze beide positieve wortels onderling gelijk zijn.

De voorwaarde voor de cirkelbeweging is dus, dat $2\alpha r^3 + hr^2 - C^2 = 0$ twee gelijke wortels heeft, dus dat de discriminant nul is.

De afgeleide $6\alpha r^2 + 2hr = 0$ heeft 0 en $-\frac{h}{3\alpha}$ tot wortels, zoodat de dubbele positieve wortel zal wezen $-\frac{h}{3\alpha}$ en de voorwaarde voor de cirkelbeweging analytisch wordt voorgesteld door

$$2\alpha\left(-\frac{h}{3\alpha}\right)^3 + 2h\left(-\frac{h}{3\alpha}\right)^2 - C^2 = 0$$

of door

$$\frac{C^2}{\alpha} = \left(\frac{h}{3\alpha}\right)^3.$$

De vorm $2\alpha r^3 + hr^2 - C^2$ gaat daardoor over in

$$2\alpha\left(r + \frac{h}{3\alpha}\right)^2\left(r - \frac{h}{6\alpha}\right).$$

De differentiaalvergelijkingen van de gevraagde beweging schrijven wij nu als volgt

$$\frac{dr}{\sqrt{2\alpha}\left(r + \frac{h}{3\alpha}\right)\sqrt{r - \frac{h}{6\alpha}}} = \lambda\, du,$$

$$\pm\, dt = \lambda\, r du,$$

$$\pm\, d\theta = \lambda\, C\, \frac{du}{r},$$

waarin u een veranderlijke en λ een standvastige is.

Om de eerste te integreeren stellen we $\sqrt{r - \frac{h}{6\alpha}} = x$, waardoor ze overgaat in $\frac{dx}{\sqrt{2\alpha}\left(x^2 + \frac{h}{2\alpha}\right)} = \lambda\, du$, waarvan de integraal is

$$\text{bg tg}\, x\sqrt{\frac{2\alpha}{h}} = k + \tfrac{1}{2}\lambda\, u\sqrt{h},$$

of in r uitgedrukt,

$$r = \frac{h}{6\alpha} + \frac{h}{2\alpha}\,\text{tg}^2(k + \tfrac{1}{2}\lambda\, u\sqrt{h}).$$

Stellen we nu $\frac{1}{2}\lambda\sqrt{h} = \sqrt{\frac{h}{2\alpha}}$, dus $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$, en, ter bepaling van k, dat r oneindig groot wordt voor $u = 0$, dus $k = \frac{\pi}{2}$, dan gaat de uitdrukking van r over in

$$r = \frac{h}{6\alpha} + \frac{h}{2\alpha}\cot^2 u\sqrt{\frac{h}{2\alpha}} = \frac{h}{2\alpha}\left(\frac{1}{\sin^2 u\sqrt{\frac{h}{2\alpha}}} - \tfrac{2}{3}\right).$$

De kleinste waarde verkrijgt r voor $u\sqrt{\frac{h}{2\alpha}} = \frac{\pi}{2}$; we stellen de waarde van u, die hieraan voldoet, gelijk aan ω, dus

$$\sqrt{\frac{h}{2\alpha}} = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Dan gaat r over in

$$r = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}} - \tfrac{2}{3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

De tweede differentiaalvergelijking wordt nu

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\,dt = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left(\frac{du}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}} - \tfrac{2}{3}du\right),$$

waarvan de integraalvergelijking is

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha}\,t = \frac{\pi}{2\omega}\cot\frac{\pi u}{2\omega} + \frac{\pi^2}{6\omega^2}(u-\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

als men onderstelt, dat $t = 0$ is voor $u = \omega$, dus als het punt het perihelium passeert.

Eindelijk gaat de derde differentiaalvergelijking over in

$$\pm\,d\theta = C\lambda\,\frac{du}{\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}} - \tfrac{2}{3}\right)}.$$

Omdat $C\lambda = \sqrt{\frac{2c^2}{\alpha}} = \frac{\pi^3}{6\omega^3\sqrt{3}}$ is, wordt, voor $\frac{\pi u}{2\omega} = \gamma$,

$$\pm\,d\theta = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,\frac{dy}{\frac{1}{\sin^2 y} - \frac{2}{3}},$$

of

$$\pm d\theta = \frac{4dy}{3\sqrt{3}}\left(-\tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{2}\frac{1}{2+\cos 2y}\right).$$

Stelt men hierin $\operatorname{tg} y = z$, dan is de integraalvergelijking

$$k + \theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi u}{2\omega} + 2\operatorname{bgtg}\frac{z}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{u}{\omega} + \operatorname{bgtg}\frac{2z\sqrt{3}}{3-z^2}.$$

Wordt z door $\operatorname{tg}\frac{\pi u}{2\omega}$ vervangen, en θ gerekend van het oogenblik, dat het perihelium wordt gepasseerd, dan is

$$\theta = -\pi + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{\omega - u}{\omega} + \operatorname{bgtg}\frac{\sin\frac{\pi u}{\omega}}{1 + 2\cos\frac{\pi u}{\omega}}\sqrt{3} \quad . \quad 3)$$

1), 2) en 3) geven de oplossing. De baan bezit twee asymptoten, welke door het centrum gaan en een hoek Θ insluiten, die gegeven wordt door

$$\Theta = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\pi.$$

Vraagstuk CLXXX.

J 2 c. Eenige personen $A_1, A_2 \ldots A_l$ spelen een spel, waarbij A_i een kans p_i heeft om te winnen, zoodat er een kans $1 - \Sigma p_i$ op remise is. Zij spelen dit spel zoo dikwijls achtereen dat òf A_1 het spel m_1 keer achtereen wint, òf A_2 m_2 keer enz., in welk geval A_1 of A_2 enz. het totaalspel gewonnen heeft.

Gevraagd wordt

a) het gemiddeld aantal spelen, die voor de beslissing noodig zijn;

b) de kans van elken speler om het totaalspel te winnen.

Beide vragen ook voor elken stand van het spel op te lossen.

(F. SCHUH.)

Oplossing *van* F. SCHUH.

Zij $f_i(x)$ het gemiddeld aantal spelen noodig voor de beslissing van het totaalspel op het oogenblik dat A_i x spelen achtereen gewonnen heeft, en $\phi_i(x)$ het gemiddeld aantal spelen voordat

A_i het spel m_i keer achtereen heeft gewonnen (afgezien dus van de overige spelers) op het oogenblik dat A_i x spelen achtereen heeft gewonnen. Denken we nu dat A_1 achtereen x spelen heeft gewonnen, dan is $\phi_1(x)$ het gemiddeld aantal spelen voordat A_1 m_1 spelen achtereen gewonnen heeft; $\phi_2(0)$ het gemiddeld aantal spelen voordat A_2 m_2 spelen achtereen gewonnen heeft; enz. In al die gevallen moet eerst het totaalspel beslist zijn, waarvoor een gemiddeld aantal spelen $f_1(x)$ noodig is; daarbij kunnen zich dan de mogelijkheden voordoen, dat het door A_1, A_2, A_3 enz. gewonnen wordt.

Passen we nu de regels voor het werken met gemiddelde aantallen toe, in de oplossing van vraagstuk 152 ontwikkeld, dan vinden we, als de kansen voor A_1, A_2, A_3 enz. om het totaalspel te winnen, op het oogenblik dat A_1 reeds x spelen achtereenvolgens heeft gewonnen, zijn $k_1 = 1 - \sum_2^l k_i, k_2, k_3, \ldots k_l$,

$$\phi_1(x) = f_1(x) + \left(\sum_2^l k_i\right) \cdot \phi_1(0),$$

$$\phi_2(0) = f_1(x) + (1 - k_2)\,\phi_2(0) \quad \text{of} \quad k_2\,\phi_2(0) = f_1(x),$$

en evenzoo

$$k_3\,\phi_3(0) = f_1(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k_l\,\phi_l(0) = f_1(x).$$

Uit deze vergelijkingen leidt men door eliminatie der k's af

$$\frac{1}{f_1(x)} = \frac{\phi_1(0)}{\phi_1(x)} \sum_1^l \frac{1}{\phi_i(0)},$$

en door oplossing der k's

$$k_2 = \frac{\phi_1(x)}{\phi_1(0)} \; \frac{\dfrac{1}{\phi_2(0)}}{\sum\limits_1^l \dfrac{1}{\phi_i(0)}},$$

$$k_3 = \frac{\phi_1(x)}{\phi_1(0)} \; \frac{\dfrac{1}{\phi_3(0)}}{\sum\limits_1^l \dfrac{1}{\phi_i(0)}},$$

enz.

Ten slotte wordt

$$k_1 = \frac{\phi_1(x)}{\phi_1(0)} \frac{\dfrac{1}{\phi_1(0)}}{\sum\limits_1^l \dfrac{1}{\phi_i(0)}} + \left(1 - \frac{\phi_1(x)}{\phi_1(0)}\right).$$

Wij hebben zoo dus alles in de functies ϕ uitgedrukt, die veel eenvoudiger zijn dan de f's. Bovenstaande formules worden nog eenvoudiger bij den aanvang van het spel als $x = 0$ en dus $f_1(0) = f_2(0) = \ldots = f_l(0) = f(l)$. Men heeft dan:

$$\frac{1}{f(0)} = \sum_1^l \frac{1}{\phi_1(0)},$$

$$k_j = \frac{\dfrac{1}{\phi_j(0)}}{\sum\limits_1^l \dfrac{1}{\phi_i(0)}}.$$

Deze eenvoudige uitkomst geeft aanleiding tot het formuleeren der volgende stelling:

Een zekere handeling heeft zoo dikwijls achtereen plaats tot dat een zekere gebeurtenis is tot stand gekomen. Deze gebeurtenis bestaat in het tot stand komen van een der gebeurtenissen I, II, III enz. die elkaar uitsluiten, en zoodanig zijn dat bij het tot stand komen van I b.v. de kansen voor de overige gebeurtenissen nog juist zoo staan als bij het begin. Nu is de omgekeerde waarde van het gemiddelde aantal handelingen noodig voor het tot stand komen van de gebeurtenis, gelijk aan de som der omgekeerde waarden der gemiddelde aantallen handelingen voor de gebeurtenissen I, II, III enz. Verder zijn de kansen voor ieder dier gebeurtenissen I, II, III enz. om het eerst tot stand te komen, evenredig aan de omgekeerde waarden der gemiddelde aantallen handelingen voor hun tot stand komen vereischt.

Deze stelling is de tegenhanger van de stelling volgens welke men de gemiddelde aantallen zelf moet optellen, als de gebeurtenis bestaat in het tot stand komen van een aantal gebeurtenissen I, II, III enz. na elkaar en in bepaalde volgorde

Het komt er nu nog op aan de functies ϕ, b.v. $\phi_i(x)$, te bepalen. Er wordt nu eerst één spel gespeeld, dat A_i kan

winnen of niet. Volgens de regels voor het werken met gemiddelde aantallen is nu

$$\phi_i(x) = 1 + p_i\phi_i(x+1) + (1-p_i)\,\phi_i(0).$$

Dit is een lineaire differentievergelijking met constante coëfficienten en constant tweede lid; zij wordt bevredigd door

$$\phi_i(x) = \frac{C}{p_i^x} + \phi_i(0) + \frac{1}{1-p_i}.$$

C vindt men door $x = 0$ te stellen, zoodat men heeft

$$\phi_i(x) = \frac{1}{1-p_i}\left(1 - \frac{1}{p_i^x}\right) + \phi_i(0).$$

Verder is $\phi_i(x) = 0$ voor $x = m_i$, dus

$$\phi_i(x) = \frac{1}{1-p_i}\,\frac{1-p_i^{m_i-x}}{p_i^{m_i}}.$$

Ten slotte heeft men dus

$$\frac{1}{f_1(x)} = \frac{1-p_1^{m}}{1-p_1^{m_1-x}} \sum_1^l \frac{(1-p_i)\,p_i^{m_i}}{(1-p_i^{m_i})},$$

$$k_1 = \frac{1-p_1^{m_1-x}}{1-p_1^{m_1}}\,\frac{\dfrac{(1-p_1)\,p_1^{m_1}}{1-p_1^{m_1}}}{\displaystyle\sum_1^l \frac{(1-p_i)\,p_i^{m_i}}{1-p_i^{m_i}}} + \frac{p_1^{m_1-x} - p_1^{m_1}}{1-p_1^{m_1}},$$

$$k_2 = \frac{1-p_1^{m_1-x}}{1-p_1^{m_1}}\,\frac{\dfrac{(1-p_2)\,p_2^{m_2}}{1-p_2^{m_2}}}{\displaystyle\sum_1^l \frac{(1-p_i)\,p_i^{m_i}}{1-p_i^{m_i}}} \text{ enz.}$$

Dit geldt voor het oogenblik dat A_1 x spelen achtereen heeft gewonnen.

Bij den aanvang van het spel, dus voor $x = 0$, worden die formules nog iets eenvoudiger.

Het eigenaardige van de hier gebruikte methode bestaat hierin, dat we niet met kansen maar met gemiddelde aantallen gewerkt hebben en de kans als vanzelf voor den dag is gekomen.

Vraagstuk CLXXXI.

K 20 c α. De waarden van x te vinden, die voldoen aan

$$1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} x = \cos^2 \tfrac{1}{2} x : (1 + \cos 2x).$$

(Dr. C. STOLP.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN, E. D. J. DE JONGH Jr., J. A. KERKHOVEN, Dr. A. J. A. PRANGE, F. SCHUH *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* E. D. J. DE JONGH Jr.

Door achtereenvolgende herleidingen van de gegeven vergelijking vinden we

$$1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x} \times \frac{1}{2 \cos^2 x},$$

$$1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{2(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x)},$$

$$1 + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}{2(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x)^2}.$$

En hieruit volgt na herleiding, waarbij $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ door u vervangen is,

$$u^6 + 2u^5 - 4u^3 - 4u^2 + 2u + 1 = 0,$$

of

$$(u^2 + u - 1)(u^4 + u^3 - 3u - 1) = 0.$$

Deze vergelijking valt uiteen in

$$u^2 + u - 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

en

$$u^4 + u^3 - 3u - 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

De wortels van 1) zijn

$$u_1 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x_1 = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}) \text{ en } u_2 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x_2 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}).$$

Het valt gemakkelijk in te zien, dat $\frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 = 90°$ is. We vinden $\frac{1}{2} x_1 = 121° \, 43' \, 3''$, dus

$$x_1 = 243° \, 26' \, 6'' \text{ en } x_2 = 63° \, 26' \, 6''.$$

Bij onderzoek blijkt, dat 2) een paar onbestaanbare wortels heeft. Voor de bestaanbare vinden we

$u_3 = \text{tg}\,\frac{1}{2}\,x_3 = 1{,}285634647\ldots$ en $u_4 = \text{tg}\,\frac{1}{2}\,x_4 = -0{,}342114312\ldots$,

waaruit

$$\tfrac{1}{2}\,x_3 = 52^\circ\,7'\,23'', \quad \text{dus } x_3 = 104^\circ\,14'\,46'',$$
$$\tfrac{1}{2}\,x_4 = 161^\circ\,6'\,49{,}5'', \text{ dus } x_4 = 322^\circ\,13'\,39''.$$

Om nu nu de onbestaanbare wortels der gegeven vergelijking te vinden, stellen we

$$u_5 \equiv a + b\sqrt{-1} \text{ dus } u_6 \equiv a - b\sqrt{-1}.$$

We hebben dan

$$(u-a-b\sqrt{-1})(u-a+b\sqrt{-1}) = (u^4+u^3-3u-1):(u-u_3)(u-u_4),$$

of, na de noodige berekeningen,

$$u^2 - 2au + a^2 + b^2 = u^2 + 1{,}943520335u + 2{,}27358496.$$

Hieruit volgt:

$$2a = -1{,}943520335;\ a^2 + b^2 = 2{,}27358496;\ b = 1{,}1529385.$$

Nu is

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{u_5 + u_6}{1 - u_5 u_6} = \frac{2a}{1 - (a^2 + b^2)} =$$
$$= \frac{-1{,}943520335}{-1{,}27358496} = 1{,}5260233.$$

We vinden $\frac{1}{2}(x_5 + x_6) = 56^\circ\,45'\,46'' = 0{,}9907$ radialen.

Stellen we nu $\frac{1}{2}(x_5 - x_6)$ voor door $y\sqrt{-1}$, uitgedrukt in radialen, dan hebben we

$$\text{tg}\tfrac{1}{2}(x_5-x_6) = \text{tg}(y\sqrt{-1}) = \frac{\sin(y\sqrt{-1})}{\cos(y\sqrt{-1})} = \frac{(e^y - e^{-y})\sqrt{-1}}{e^y + e^{-y}} = \frac{2b\sqrt{-1}}{1 + a^2 + b^2}.$$

Stellen we $e^y = z$,

dan is $\dfrac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}} = \dfrac{2b}{1 + a^2 + b^2}$, waaruit we, na herleiding, vinden

$$z^2 = e^{2y} = \frac{1 + a^2 + 2b + b^2}{1 + a^2 - 2b + b^2} = \frac{5{,}579462}{0{,}967708} = 5{,}76564.$$

$$2y \log e = \log 5{,}76564,$$
$$y = 0{,}8759.$$

We vonden reeds

$$\tfrac{1}{2}(x_5 + x_6) = 0{,}9907 \text{ radialen.}$$

Verder is

$$\tfrac{1}{2}(x_5 - x_6) = 0{,}8759\sqrt{-1} \text{ radialen.}$$

Dus

$$x_5 = 0{,}9907 + 0{,}8759\sqrt{-1} \text{ radialen.}$$

en

$$x_6 = 0{,}9907 - 0{,}8759\sqrt{-1} \text{ radialen.}$$

Vraagstuk CLXXXII.

K 14 c α. Te bewijzen, dat men een half-regelmatig veelvlak kan samenstellen uit een zeker aantal gelijke en gelijkvormige viervlakken, die aan de volgende voorwaarden voldoen.

De zijvlakken ACD en BCD sluiten een rechten hoek in; de ribben AB en CD kruisen elkaar loodrecht en de in B samenkomende ribben maken onderling gelijke hoeken. Bovendien is de hoek van AB met het vlak BCD gelijk aan de halve som der hoeken, welke de in A samenkomende ribben twee aan twee insluiten.

(Dr. C. STOLP.)

Opgelost *door* J. A. KERKHOVEN *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* J. A. KERKHOVEN.

Zij ABCD (fig. 11) een viervlak, dat aan de gegeven voorwaarden voldoet.

Stellen wij $\angle ABC = \angle ABD = \angle CBD = 2\alpha$; $\angle ABE = \beta$, $\angle CAD = \delta$, $\angle BAC = \angle BAD = \gamma$, dan is

$$2\beta = 2\gamma + \delta \quad \text{of} \quad \gamma = \beta - \tfrac{1}{2}\delta \quad \ldots\ldots \; 1).$$

Boldriehoek FGH, beschreven uit A, rechthoekig in H, geeft $\cos\gamma = \sin\beta\cos\frac{1}{2}\delta$, of wegens 1),

$$\cos\beta\cos\tfrac{1}{2}\delta + \sin\beta\sin\tfrac{1}{2}\delta = \sin\beta\cos\tfrac{1}{2}\delta,$$

of wel

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \frac{\sin\beta - \cos\beta}{\sin\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \; 2).$$

Boldriehoek KMN, beschreven uit B, rechthoekig in N, geeft

$$\cos 2\alpha = \cos\beta\cos\alpha, \quad \text{of} \quad 2\cos^2\alpha - \cos\beta\cos\alpha - 1 = 0 \;..\; 3).$$

Uit de driehoeken ABC, ACE en BCE leidt men af

$$BC = \frac{\sin\gamma}{\sin 2\alpha} \cdot AC = \frac{\sin\gamma}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\delta} \cdot CE = \frac{\sin\gamma}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin \frac{1}{2}\delta} \cdot BC.$$

Derhalve is wegens 1)

$$\sin(\beta - \tfrac{1}{2}\delta) \,.\, \sin\alpha = \sin 2\alpha \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\delta,$$

of na deeling door $\sin\alpha \cos \frac{1}{2}\delta$,

$$\sin\beta - \cos\beta \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta - 2\cos\alpha \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\delta = 0,$$

of wegens 2),

$$\sin^2\beta - (\cos\beta + 2\cos\alpha)(\sin\beta - \cos\beta) = 0,$$

$$1 - \sin\beta\cos\beta - 2\cos\alpha(\sin\beta - \cos\beta) = 0.$$

Door substitutie van de hieruit getrokken waarde van $\cos\alpha$ in 3), vindt men

$$(1-\sin\beta\cos\beta)^2 - \cos\beta(1-\sin\beta\cos\beta)(\sin\beta-\cos\beta) - 2(\sin\beta-\cos\beta)^2 = 0.$$

Hieruit vindt men na eenige herleiding

$$\operatorname{tg} 2\beta = -2 \quad \text{en} \quad \operatorname{tg}\beta = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Nu is tevens $\cos\beta = -\cos 2\beta : \sin\beta$. Door substitutie in

$$\cos 2\alpha = \cos\beta \,.\, \cos\alpha$$

vindt men dus

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\cos 2\beta}{\cos\beta}.$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan door $\alpha = 90 - \beta$ en door $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2\sin\beta}$.

De tweede oplossing komt niet in aanmerking, omdat zij 2α grooter dan 180° maakt.

Ten slotte vindt men nu

$$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}};$$

$$\cos\beta = \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

Door de gevonden waarden van α en β is de vorm van het viervlak bepaald. Nu kunnen wij uit twee dezer viervlakken

een vierhoekige pyramide samenstellen. Daartoe laten wij het vlak ACD tegen het overeenkomstige vlak van het tweede viervlak aansluiten. Het zijvlak BCD vormt dan met het overeenkomstige een ruit. Uit 30 van zulke pyramiden kan men nu een halfregelmatig lichaam samenstellen, begrensd door 30 zulke ruiten. Figuur 12 stelt de projectie er van voor.

Denken wij ons een kubus PQRS, waarvan de ribbe PQ = 2AE (fig. 11) is. Wij teekenen op ieder zijvlak van den kubus eèn ruit als boven bedoeld, zoodanig dat de diagonalen in de hoofdvlakken liggen, en daarbij zorg dragende, dat de korte diagonaal CD in eenig zijvlak de korte diagonalen in de vier aangrenzende zijvlakken rechthoekig kruist, doch met die in het overstaande zijvlak evenwijdig is. Voorts beschrijven wij in den kubus den ingeschreven bol. Door elk der drie raakpunten A, N en H trekken wij twee groote cirkels, zooals AG, NF enz., waarvan de vlakken met de korte diagonalen een hoek GAF = α maken, dus loodrecht op de zijden der ruiten staan.

In boldriehoek AFG, rechthoekig in F, is AF = α en $\angle GAF = \alpha$, derhalve $\sin\alpha = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tg} FG$; of $\operatorname{tg} FG = \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha$, en

$$\sin FG = \frac{\operatorname{tg} FG}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 FG}} = \frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^4\alpha}}.$$

Nu is

$$\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{30-10\sqrt{5}}{100} = \tfrac{1}{8}.$$

Derhalve

$$\sin FG = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}), \text{ dus } FG = 18°.$$

Verder is

$$\cos AG = \cos FG \,.\, \cos\alpha = \tfrac{1}{4}\sqrt{16-(6-2\sqrt{5})} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Dit is de verhouding van het apothema tot den straal van den omgeschreven cirkel van een regelmatigen vijfhoek, dus AG = 36°. De boldriehoek AGM heeft dus zijne 3 zijden gelijk aan 36°. Hetzelfde geldt voor elk der 12 boldriehoeken, die twee aan twee in de zes raakpunten van kubus en bol samenkomen.

Ook van de 8 driehoeken zooals GWZ, die geen hoekpunt gemeen hebben met een der zes raakpunten, zijn alle hoeken gelijk aan 2α, dus alle zijden gelijk aan 36°. Elk der 6 groote cirkels wordt dus door de andere 5 verdeeld in 10 deelen van 36°; wij verkrijgen aldus op die cirkels $\frac{1}{2} \times 6 \times 10 = 30$ snijpunten.

Nu brengen wij door elk dezer 30 punten een raakvlak aan den bol; zes dezer raakvlakken vallen samen met de zijvlakken van den kubus.

De raakvlakken in de opvolgende punten van één cirkel, zooals AZ, hebben hunne doorsneden evenwijdig aan BD, en wij kunnen gemakkelijk aantoonen, dat BD samenvalt met de doorsnede der raakvlakken in A en in G. Daartoe moeten wij slechts bewijzen, dat de loodlijn AK uit het middelpunt der ruit op de zijde neergelaten, gelijk is aan R tg 18°, als R de straal van den bol is.

Blijkens figuur 11 is deze loodlijn gelijk aan

$$BE \sin\alpha = AE \operatorname{cotg}\beta \sin\alpha = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} R = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} R.$$

En men heeft

$$\sin 18^\circ = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}), \quad \cos 18^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

derhalve

$$R \operatorname{tg} 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} R = BE \sin\alpha.$$

Evenzoo zijn de doorsneden der raakvlakken in de deelpunten van den cirkel AY evenwijdig aan BC, terwijl BC zal samenvallen met een dezer doorsneden. En daar al de raakpunten op onderling gelijke afstanden van 36° liggen, zullen de aldus verkregen ruiten gelijk zijn aan ruit BDLC, terwijl de zijden achtereenvolgens loodrecht staan op de twee groote cirkels, waarvan eenig raakpunt de doorsnede is.

Als wij nu de hoekpunten der ruiten verbinden met het middelpunt van den bol, hebben wij het lichaam verdeeld in 30 pyramiden.

Het dertigvlak heeft 32 hoekpunten en 60 ribben.

Vraagstuk CLXXXIII.

K 22. Nadat twee onderling loodrechte projectievlakken tot één vlak vereenigd zijn, trekt men vier rechten zoodanig dat 1 en 2 de hoeken van 3 en 4 middendoor deelen. Beschouwt men nu 1 als de eerste en tweede projectie van een rechte h, 2 als de eerste en tweede projectie van een rechte l, 3 en 4 als de projecties van een rechte g, dan is het vlak (gh) loodrecht op het vlak (gl). Men vraagt dit te bewijzen. (Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, E. D. J. DE JONGH Jr., Dr. C. STOLP, B. J. VAN TROTSENBURG *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP *en* B. J. VAN TROTSENBURG.

Daar de rechte 1 den hoek der rechten 3 en 4 middendoor deelt, ligt haar snijpunt met de as van projectie even ver van 3 en 4, dus op gelijke afstanden van de projecteerende vlakken G_1 en G_2 der rechte g. Hieruit volgt, dat het vlak door g en h een paar der ruimtehoeken middendoor deelt, welke door G_1 en G_2 worden gevormd.

Op dezelfde wijs blijkt, dat het vlak (gl) het tweede paar ruimtehoeken tusschen G_1 en G_2 middendoor deelt. Derhalve staan (gl) en (gh) loodrecht op elkaar.

Vraagstuk CLXXXIV.

N° 1 g α: Van drie onderling loodrechte projectievlakken worden het horizontale en derde projectievlak op de gebruikelijke wijze in het vertikale vlak neergeslagen. Men vraagt het stelsel der rechten te onderzoeken, waarvan de horizontale en derde projecties symmetrisch liggen ten opzichte van de doorsnede van het vertikale en het horizontale projectievlak. (Dr. H. DE VRIES)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, E. D. J. DE JONGH Jr., Dr. C. STOLP *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. W. BOUWMAN.

Door een willekeurig gekozen punt P gaat in het algemeen *een* rechte l van het bedoelde stelsel. Bepaalt men de punten

Q''' en R'', die t. o. v. de projectieas (Xas) symmetrisch liggen met de horizontale en derde projectie van P, dan heeft de bedoelde rechte tot projecties $l'' \equiv P''R''$ en $l''' \equiv P'''Q'''$.

Liggen evenwel P'' en P''' symmetrisch t. o. v. de Xas, dan is *elke* rechte door P, waarvan de tweede en derde projectie elkaar op de Xas snijden, een lijn van het stelsel (l). In dit geval is het punt P evenver verwijderd van de drie projectievlakken, en valt P''' samen met P'.

Alle rechten l snijden dus de lijn d, die de m.pl. is der punten, waarvoor P' en P''' samenvallen, terwijl P' en P'' elkaars spiegelbeelden zijn t. o. v. de Xas. Blijkbaar is d ook een lijn van het stelsel (l).

Wij zullen nu nagaan hoeveel lijnen l in een gegeven vlak α liggen. Daartoe bepalen we de m pl. van de horizontale doorgangen D_2 der lijnen l, welke door het snijpunt A van d met α gaan. Daar A'' beschouwd kan worden als de horizontale doorgang van een rechte l, en wel van de rechte AA'', bevat elke rechte door A'' getrokken twee punten van de m.pl. van D_2; dus is deze een kegelsnede. Haar snijpunten met den horizontalen doorgang van α leveren twee lijnen l, die in het vlak α liggen.

Hieruit blijkt tevens, dat alle door A getrokken lijnen l een quadratisch kegelvlak vormen, dat ook de rechte d bevat. Laat men A de lijn d doorloopen, dan verplaatst deze kegel zich evenwijdig met zichzelf. Dus vormen de lijnen l een congruentie, die tot richtlijnen heeft de lijn d en een oneindig ver gelegen kegelsnede, die d snijdt.

De rechten l, die op een gegeven rechte m rusten, vormen blijkbaar een kubisch regelvlak met m als enkelvoudige en d als dubbele richtlijn.

Oplossing *van* T. J. Allersma.

Wij beschouwen het horizontale, vertikale en derde projectievlak achtereenvolgens als XOY, XOZ en YOZ. Als de horizontale projectie van een lijn l van het bedoelde stelsel stukken a en b afsnijdt van OX en OY, zal haar derde projectie op OY en OZ segmenten gelijk aan $-a$ en b bepalen. Dus wordt l voorgesteld door

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad , \quad -\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Zal l door het punt (x_0, y_0, z_0) gaan, dan moet men dus hebben

$$\frac{1}{a} = \frac{z_0 - y_0}{x_0 z_0 + y_0^2}, \quad \frac{1}{b} = \frac{x_0 + y_0}{x_0 z_0 + y_0^2}.$$

Hierdoor is de rechte bepaald, tenzij men heeft

$$-x_0 = y_0 = z_0;$$

immers dan zijn a en b onbepaald, en slechts gebonden aan de voorwaarde

$$-\frac{y_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

De oneindig vele lijnen l, die door het punt $(-y_0, y_0, y_0)$ gaan, vormen een kegelvlak, waarvan de vergelijking door eliminatie van $\frac{1}{a}$ en $\frac{1}{b}$ uit 1) en 2) wordt gevonden. Men vindt dan

$$xz + y^2 - y_0(x + 2y - z) = 0.$$

Doorloopt de top van dezen kegel de rechte d, voorgesteld door

$$-x = y = z,$$

dan wordt de kegel evenwijdig aan zich zelf verplaatst.

Tot dezelfde uitkomst geraakt men door de rechten l te zoeken, die evenwijdig zijn met een rechte

$$x : \alpha = y : \beta = z : \gamma.$$

Uit

$$\alpha : \beta = a : -b \quad \text{en} \quad \beta : \gamma = a : b$$

vindt men de voorwaarde $\alpha\gamma + \beta^2 = 0$, zoodat elke lijn van het stelsel evenwijdig is met een der beschrijvende lijnen van den kegel

$$xz + y^2 = 0,$$

die blijkbaar de rechte d bevat en de vlakken $x = 0$ en $z = 0$ op $y = 0$ aanraakt.

Vraagstuk CLXXXV.

M¹ 5 h. Men vraagt het aantal kegelsneden te bepalen, die een vlakke kubische kromme in een gegeven punt snijden en haar elders vijfpuntig aanraken. (Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. W. Bouwman, F. Schuh, Dr. H. de Vries *en* Dr. J. de Vries.

Oplossing *van* Dr. W. Bouwman.

Wij zullen het aantal kegelsneden bepalen, die eene vlakke kromme van den n^{den} graad, die wij zonder dubbelpunten en keerpunten onderstellen, aanraken, en door een gegeven punt gaan. Daartoe bepalen wij eerst het aantal kegelsneden van een bundel, die de gegeven kromme C^n aanraken, en hebben als bijzondere gevallen daarvan dat een of meer der basispunten op C^n liggen. Met behulp van de verkregen uitkomsten zoeken wij, hoeveel kegelsneden door drie basispunten C^n driepuntig aanraken, terwijl weder een of meer dezer punten op C^n kunnen liggen. Daarna laten wij de kegelsneden door twee vaste punten gaan en C^n vierpuntig raken, en ten slotte hebben wij een vast punt en vijfpuntige aanraking te beschouwen.

1. De basispunten A_1, A_2, A_3, A_4 liggen niet op C^n. Wij beschouwen A_1 als top van een stralenbundel. Een straal a snijdt C^n in n punten $P_1, P_2 \ldots, P_n$. De punten A_1, A_2, A_3, A_4, P_k bepalen een kegelsnede, die C^n nog in $2n-1$ punten Q snijdt. Wij denken ons deze punten met A_1 door stralen b verbonden. A_1 is dan de top van twee bundels (a) en (b), waartusschen eene verwantschap $(2n^2-n,\ 2n^2-n)$ bestaat. De $4n^2-2n$ samenvallingen van aan elkaar toegevoegde stralen zijn ten deele afkomstig van de kegelsneden, die C^n aanraken, ten deele van de ontaarde kegelsneden van den bundel.

Stel dat de rechte A_1A_2 die door A_3A_4 tot een kegelsnede wordt aangevuld, C^n in $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ snijdt. Met den straal A_1Q_1 van den eersten bundel komen overeen de stralen A_1Q_2, $A_1Q_3 \ldots A_1Q_n$ van den tweeden bundel; aan A_1Q_2 beantwoorden A_1Q_1, $A_1Q_3, \ldots A_1Q_n$, enz. De rechte A_1A_2 vervangt dus $n(n-1)$ samenvallingen. Hetzelfde geldt ten opzichte van A_1A_3 en A_1A_4. Het aantal rakende kegelsneden bedraagt dus $4n^2-2n-3(n^2-n)=n^2+n$.

2. Stel dat A_1 op C^n ligt, A_2, A_3, A_4 niet. Dit geval kunnen wij op twee wijzen behandelen, n.l. door A_1 en door een der andere punten als top van den stralenbundel te nemen.

a. Zij A_1 top. Een straal a snijdt C^n in $(n-1)$ punten

$P_1 \ldots P_{n-1}$. Eene kegelsnede door A_1, A_2, A_3, A_4, P_k snijdt C^n, behalve in A_1 en P_k, in $2(n-2)$ punten Q. Tusschen de beide stralenbundels (a) en (b) bestaat nu eene verwantschap $(2(n-1)^2, 2(n-1)^2)$ met $4n^2 - 8n + 4$ samenvallingen. Gaan we nu de ontaardingen na, en wel eerst het samenstel van A_1A_2 en A_3A_4. De lijn A_2A_1 snijdt C^n in $(n-1)$ punten; dit geeft aanleiding tot $(n-1)(n-2)$ samenvallingen, die afgetrokken moeten worden. Daar hetzelfde geldt voor de lijnen A_1A_3 en A_1A_4, vinden wij dus $4n^2-8n+4-(3n^2-9n+6) = n^2+n-2$ rakende kegelsneden.

b. Zij nu A_2 top. Een straal snijdt C^n in n punten $P_1 \ldots P_n$. De kegelsnede door A_1, A_2, A_3, A_4, P_k snijdt C^n, behalve in A_1 en P_k, in $2n-2$ punten. De overeenkomst is dus hier een $(2n(n-1), 2n(n-1))$ met $4n^2 - 4n$ samenvallingen. De drie ontaarde kegelsneden zijn nu niet op dezelfde wijs te behandelen. A_2A_3 snijdt C^n in n punten, die aanleiding geven tot $n(n-1)$ samenvallingen van overeenkomstige stralen; hetzelfde geldt van A_2A_4. Maar A_1A_2 snijdt C^n nog in $n-1$ punten, levert dus $(n-1)(n-2)$ samenvallingen. In het geheel zijn dus $3n^2 - 5n + 2$ samenvallingen afkomstig van ontaardingen. En men vindt weer $n^2 + n - 2$ rakende kegelsneden.

3. Op dezelfde wijs behandelen we het geval, dat p punten A_k op C^n liggen. Kiezen we een dier punten als top van twee stralenbundels, dan wordt de overeenkomst een $[(n-1)(2n-p-1), (n-1)(2n-p-1)]$. Van de samenvallingen komen op rekening van de ontaardingen $3n^2 - 7n + 2 - 2p(n-2)$. Hieruit volgt voor het aantal rakende kegelsneden van den bundel $n^2 + n - 2p$.

4. Wij nemen nu drie vaste punten A_1, A_2, A_3 en beschouwen A_1 als top van twee stralenbundels, die als volgt verwant zijn. Een straal a door A_1 snijdt C^n in n punten P_k; door A_1, A_2, A_3 legt men de kegelsnede, die C^n in P_k raakt en haar snijdt in $2n-2$ punten Q_k; deze worden met A_1 verbonden en leveren evenzoo vele stralen b van het tweede stelsel.

Omgekeerd zullen door een punt Q_k, volgens § 2, n^2+n-2 kegelsneden gaan, die C^n elders raken. Deze raakpunten bepalen n^2+n-2 stralen van den eersten bundel. Aan de n punten Q_k op een straal b beantwoorden dus n^3+n^2-2n stralen a, aan de n punten P_k op een straal a beantwoorden

$2n^2 - 2n$ stralen b. De overeenkomst is hier een $(n^3 + n^2 - 2n, 2n^2 - 2n)$, en het aantal samenvallingen bedraagt $n^3 + 3n^2 - 4n$. Deze bepalen ten deele driepuntig rakende kegelsneden, ten deele komen ze op rekening van ontaarde kegelsneden.

α. De kegelsnede bestaat uit A_2A_3 en eene lijn door A_1.

De lijn A_2A_3 snijdt C^n in n punten $P_1, P_2 \ldots P_n$. Met de lijn A_1P_1 vormt ze een kegelsnede die in P_1 twee punten met C^n gemeen heeft. Daar deze rechte C^n nog in $n - 1$ punten $Q_2, Q_3, \ldots Q_n$ snijdt, vertegenwoordigt zij $n - 1$ samenvallingen. Daar hetzelfde voor A_1P_2 enz. geldt, zijn hiermee $n(n-1)$ samenvallingen aangewezen.

Verder zijn uit A_1 aan de kromme $n(n - 1)$ raaklijnen te trekken, die ieder C^n nog in $(n - 2)$ andere punten snijden, en met A_2A_3 een rakende kegelsnede vormen; zij leveren nog $n(n - 1)(n - 2)$ samenvallingen.

β. De kegelsnede bestaat uit A_1A_2 en eene lijn door A_3.

A_1A_2 snijdt C^n in n punten $P_1 \ldots P_n$. Zij A_3P_1 de andere lijn, dan hebben wij in P_1 twee snijpunten en daar op A_1A_2 nog $n - 1$ punten liggen, vindt men hier $n - 1$ samenvallingen.

Verbinden we A_3 achtereenvolgens met de punten $P_1, P_2 \ldots P_n$, dan vinden we dus $n(n - 1)$ samenvallingen.

De beschouwing der kegelsneden, welke uit A_1A_3 en een lijn door A_2 bestaan, levert eveneens $n(n - 1)$ samenvallingen. Daar het geheele aantal af te trekken samenvallingen $n^3 - n$ bedraagt, vindt men voor het aantal driepuntig rakende kegelsneden

$$(n^3 + 3n^2 - 4n) - (n^3 - n) = 3n^2 - 3n.$$

Onderstelt men, dat p van de punten A_1, A_2, A_3 op C^n, dus $3 - p$ buiten C^n liggen, dan vindt men zonder moeite voor het aantal driepuntig rakende kegelsneden

$$3n^2 - 3n - 3p.$$

5. We nemen nu twee vaste punten A_1 en A_2 buiten C^n aan en kiezen A_1 als top van twee stralenbundels (a) en (b). De straal a snijdt C^n in n punten $P_1, P_2 \ldots P_n$. Door A_1 en A_2 leggen we een kegelsnede, die C^n in P_1 driepuntig raakt en haar verder in $2n - 3$ punten Q_k snijdt, die met A_1 $2n-3$ stralen b bepalen. Aan den straal a beantwoorden dus $n(2n-3)$ stralen b. Omgekeerd gaan door A_1, A_2 en een punt Q_l van

van C^n $3n^2 - 3n - 3$ kegelsneden, die de kromme elders driepuntig raken; aan een straal b beantwoorden dus $3n^3 - 3n^2 - 3n$ stralen a. De overeenkomst is dus een

$$(3n^3 - 3n^2 - 3n \quad , \quad 2n^2 - 3n),$$

en het aantal samenvallingen bedraagt

$$3n^3 - n^2 - 6n.$$

Deze behooren ten deele tot vierpuntig rakende kegelsneden, ten deele komen zij op rekening van de ontaardingen.

α. De kegelsnede bevat de lijn A_1A_2 als bestanddeel.

Kiezen we als lijn die A_1A_2 tot een kegelsnede aanvult, de raaklijn aan C^n in het op A_1A_2 gelegen punt P_1, dan telt dit voor een driepuntige aanraking in P_1, terwijl met A_1P_1 de lijnen A_1P_2, enz. samenvallen. Hieruit blijkt, dat de lijn A_1A_2 $n(n-1)$ samenvallingen vertegenwoordigt.

β. De kegelsnede bestaat uit eene lijn door A_2, die C^n in het punt Q_1 raakt en de lijn A_1Q_1. Dan vallen in Q_1 weer drie punten van de kegelsnede en C^n samen. A_1Q_1 heeft met C^n verder nog $n-1$ snijpunten, levert dus $n-1$ samenvallingen.

Daar er uit A_2 $n(n-1)$ raaklijnen te trekken zijn, vindt men op deze wijze $n(n-1)^2$ samenvallingen.

γ. De kegelsnede bestaat uit een lijn door A_1, die C^n in P_1 raakt en verder in $n-2$ punten snijdt, en de lijn A_2P_1. Hier hebben we een straal a die met $2(n-2)$ stralen b samenvalt. Daar er uit A_1 $n(n-1)$ raaklijnen te trekken zijn, vindt men alzoo $2n(n-1)(n-2)$ samenvallingen.

Het aantal vierpuntig rakende kegelsnede is dus

$$(3n^3 - n^2 - 6n) - (3n^3 - 7n^2 + 4n) = 6n^2 - 10n.$$

6. Ligt A_1 wel, A_2 niet op C^n. Kiezen wij A_1 als top, dan is de overeenkomst een $((n-1)(3n^2 - 3n - 6), (n-1)(2n-4))$, en het aantal samenvallingen $3n^3 - 4n^2 - 9n + 10$.

De in § 5 onder α, β, γ genoemde getallen worden hier achtereenvolgens $(n-1)(n-2)$, $n(n-1)(n-2)$, $2[n(n-1)-2](n-3)$, en hun som $3n^3 - 10n^2 + n + 14$. Het aantal vierpuntig rakende kegelsneden is dus

$$3n^3 - 4n^2 - 9n + 10 - (3n^3 - 10n^2 + n + 14) = 6n^2 - 10n - 4.$$

Liggen de punten A_1 en A_2 beide op C^n, dan vinden we, op soortgelijke wijs, voor het aantal vierpuntig rakende kegelsneden

$$6n^2 - 10n - 8.$$

7. Trachten we nu het aantal vijfpuntig rakende kegelsneden te vinden, die door een punt A_1 gaan. Onderstellen we voorloopig dat A_1 niet op C^n ligt. Een straal a door A_1 snijdt C^n in n punten $P_1 \ldots P_n$. Eene kegelsnede, die door A_1 gaat en C^n in P_1 vierpuntig aanraakt, heeft met C^n nog $2n - 4$ punten Q gemeen; een straal a bepaalt dus $n(2n - 4)$ stralen b. Omgekeerd gaan er door A_1 en een punt Q van de kromme, volgens § 6, $6n^2 - 10n - 4$ kegelsneden, die elders vierpuntig raken. De overeenkomst tusschen (a) en (b) is dus een $(6n^3 - 10n^2 - 4n,\ 2n^2 - 4n)$, en het aantal samenvallingen bedraagt $6n^3 - 8n^2 - 8n$.

In de eerste plaats kan nu de kegelsnede ontaarden in een buigraaklijn van C^n en de rechte, die A_1 met het buigpunt verbindt. De laatste snijdt C^n nog in $n - 1$ punten Q, en daar er $3n(n - 2)$ buigpunten zijn, leveren de overeenkomstige ontaarde kegelsneden $3n(n - 2)(n - 1)$ samenvallingen.

Zij verder $P_1 \equiv P_2$ het raakpunt van een door A_1 getrokken raaklijn. We beschouwen zes op elkaar volgende punten 1, 2, 3, 4, 5, 6, waarvan 3 en 4 met P_1 en P_2 samenvallen. De kegelsnede $A_1 1234$ ontaardt in het samenstel der rechten A_1P_1 en 12; de kegelsnede $A_1 2345$ valt uiteen in A_1P_1 en 25; de kegelsnede $A_1 3456$ bestaat uit A_1P_1 en 56. De $n - 2$ punten, welke de raaklijn A_1P_1 nog met C^n gemeen heeft, behooren als punten Q tot deze drie kegelsneden; bijgevolg vervangt de straal A_1P_1 $3(n - 2)$ samenvallingen. Alle raaklijnen uit A_1 beschouwende, vinden we dus $3(n - 2)(n - 1)n$ samenvallingen.

Het aantal vijfpuntig rakende kegelsneden bedraagt dientengevolge

$$(6n^3 - 8n^2 - 8n) - (6n^3 - 18n^2 + 12n) = 10n^2 - 20n.$$

8. Ligt A_1 op C^n, dan hebben we te maken met een overeenkomst

$$((n - 1)(6n^2 - 10n - 8),\ (n - 1)(2n - 5)).$$

De ontaardingen leveren nu op $3n(n-2)^2+3[n(n-1)-2](n-3)$

samenvallingen; dus is het aantal vijfpuntig rakende kegelsneden in dit geval

$$(6n^3-14n^2-5n+13)-(6n^3-24n^2+15n+18)=10n^2-20n-5.$$

Uit het voorgaande is gebleken, dat het aantal k-puntig rakende kegelsneden telkens met k vermindert, wanneer een punt A op C^n komt te liggen.

Stellen we nu $n=3$, dan vinden we dat door een gegeven punt van een vlakke kubische kromme 25 kegelsneden gaan, die haar elders vijfpuntig aanraken.

Opmerking. De vergelijking der vijfpuntig rakende kegelsnede is door Van den Berg bepaald (*Versl. en Med. K. A. v. W.*, 3e reeks, deel IX). Door op haar toe te passen de door Halphen (*Journ. d. math. pures et app.*, série III, t. II) ontwikkelde methode ter bepaling van het aantal punten eener algebraische kromme, die aan een gegeven differentiaalvergelijking voldoen, kan men de bovenstaande uitkomsten terug vinden. Ook de invloed van bijzondere punten is op die wijs na te gaan.

Opmerking van F. Schuh. Door de Jonquières (*Crelle's Journal*, Bd. 66) is het aantal krommen C^m bepaald, die een C^n ergens p_1-puntig raken, verder ergens p_2-puntig raken enz. en nog aan eenige andere voorwaarden voldoen. In het bijzonder vindt hij, dat het aantal C^m die C^n $(q+1)$-puntig raken en door $\frac{1}{2}m(m+3)-q$ gegeven punten gaan, voorgesteld wordt door $\frac{1}{2}n(q+1)[2m+(n-3)q]$. Ligt een dier punten op C^n, dan voldoet de C^m, die daar $(q+1)$-puntig raakt, $(q+1)$ maal aan de vraag. Hieruit vindt men als antwoord op de boven gestelde vraag 25.

Oplossing *van* Dr. J. de Vries.

Uit de eigenschappen van het bij vier punten eener kubische kromme behoorende tegenpunt, dat bij samenvallen der vier punten tot een punt P het tweede tangentiaalpunt T van P is, volgt, dat een kegelsnede, die C^3 in P vijfpuntig raakt, haar nog snijdt in het punt Q der rechte PT.

Verbindt men Q met de overige punten van C^3 door rechten p en met hun tweede tangentiaalpunten door rechten t, dan bestaat tusschen de rechten p en t blijkbaar een verwantschap

(32, 2). Tot de 34 samenvallingen $p \equiv t$ behooren natuurlijk de rechten, die Q met de 9 buigpunten van C^3 verbinden, omdat voor deze punten P met T samenvalt. Op de overige stralen $p \equiv t$ ligt een punt P in een rechte met zijn tweede tangentiaalpunt T en het punt Q. Dus gaan door Q 25 elders vijfpuntig rakende kegelsneden.

Vraagstuk CLXXXVI.

M¹ 1 d. Elke rechte door een der basispunten van een bundel van vlakke krommen der n^{de} orde wordt door een zeker aantal dier krommen aangeraakt. Van welken graad is de meetkundige plaats der raakpunten, wanneer deze rechte om het bedoelde basispunt draait? (Dr. H. DE VRIES.)

Opgelost *door* F. SCHUH, Dr. H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Een willekeurige rechte door een basispunt P van een bundel krommen C^n snijdt elke kromme nog in $(n-1)$ punten. In elk der $2(n-2)$ dubbelpunten der involutie van den graad $(n-1)$, welke door die groepen van snijpunten wordt gevormd, wordt de rechte door een C^n geraakt.

De gevraagde m pl. zal zoo vaak door P gaan, als er krommen zijn, die P in een buigpunt hebben.

Is de bundel gegeven door $F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z) = 0$, en duidt men op bekende wijs de afgeleiden van de tweede orde door F_{kl} en G_{kl} aan, heeft men de coördinaten van P te substitueeren in

$$\begin{vmatrix} F_{11}+\lambda G_{11}, & F_{12}+\lambda G_{12}, & F_{13}+\lambda G_{13} \\ F_{12}+\lambda G_{12}, & F_{22}+\lambda G_{22}, & F_{23}+\lambda G_{23} \\ F_{13}+\lambda G_{13}, & F_{23}+\lambda G_{23}, & F_{33}+\lambda G_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Men vindt dus drie waarden voor λ, zoodat P een drievoudig punt der m.pl. is, en deze een kromme van de $(2n-1)^e$ orde zal wezen.

OPMERKINGEN. I. Dat P een buigpunt is van drie krommen van den bundel, kan men ook als volgt inzien. Brengt men elke C^n tot doorsnijding met haar raaklijn in P, dan is de

m.pl. dier snijpunten een C^{n+1}, die met elke rechte door P $(n-2)$ punten gemeen heeft, dus drie maal door P gaat. Elke raaklijn in het drievoudige punt heeft evenwel met de overeenkomstige C^n drie in P vereenigde punten gemeen, is dus buigraaklijn. (J. D. V.)

II. Een vraag van algemeener strekking wordt behandeld door Dr. W. BOUWMAN in zijn opstel „Ueber den Ort der Berührungspunkte von Strahlenbüscheln und Curvenbüscheln" (*N. Archief*, 2e reeks, deel IV, bl. 259). (RED.).

Vraagstuk CLXXXVII.

L^2 17 h. Men beschouwt de verzameling van rechten gelegen op een bundel van quadratische oppervlakken. Van welken graad is het regelvlak gevormd door de rechten welke een gegeven rechte snijden?

(Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN, F. SCHUH *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* F. SCHUH.

Om den graad van het regelvlak te vinden, hebben we te bepalen in hoeveel punten het door een willekeurige rechte gesneden wordt. We hebben dus de vraag te beantwoorden: hoeveel rechten, gelegen op een bundel quadratische oppervlakken, snijden twee gegeven rechten p en q? Door projectieve omvorming kunnen we van de eene lijn de Z-as, en van de andere de lijn in 't oneindige van het XY-vlak maken. De vergelijkingen van een rechte, die p en q snijdt, zijn dan

$$z = c \quad \text{en} \quad y = mx.$$

Deze rechte ligt op het quadratische oppervlak

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$$

als voldaan is aan

$$A + 2Fm + Bm^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 1),$$

$$L + 2Kc + Cc^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2),$$

$$G + Hm + Ec + Dmc = 0 \quad \ldots\ldots \quad 3).$$

De voorwaarde dat een der beschrijvende lijnen van het

oppervlak de rechten p en q snijdt, vindt men door c en m uit 1), 2) en 3) te elimineeren. We kunnen beginnen met uit 3) c op te lossen en in 2) te substitueeren; we krijgen dan

$$L(E + Dm)^2 - 2K(E + Dm)(G + Hm) + C(G + Hm)^2 = 0 \;..\; 4).$$

We hebben nu nog uit 1) en 4) m te elimineeren. De eliminant wordt van den 8ste graad in de coëfficienten A, B, ... L. Nu bevat echter iedere coëfficient lineair den parameter λ van den bundel ($A = A_1 + \lambda A_2$ enz.), zoodat we een vergelijking van den 8sten graad in λ krijgen. Er zijn dus 8 quadratische oppervlakken in den bundel met een beschrijvende lijn, die zoowel p als q snijdt.

De graad van het regelvlak der beschrijvende lijnen van den bundel, die p snijden, is dus 8.

Oplossing *van* Dr. W. Bouwman *en* Dr. J. de Vries.

De gegeven bundel quadratische oppervlakken snijdt een willekeurig door de lijn a gebracht vlak α volgens een bundel van kegelsneden. Drie kegelsneden van dezen bundel ontaarden in paren van rechte lijnen, en dit zijn de in α gelegen rechten van het regelvlak. Buitendien is a een dubbellijn, want elk punt A van a ligt op een oppervlak van den bundel, en de rechte lijnen door A op dit oppervlak getrokken, behooren tot het regelvlak. Ieder punt A van a is dus dubbelpunt en de graad van het oppervlak is $6 + 2 = 8$.

Opmerking. Op a liggen 8 klempunten, n.l. in de snijpunten van a met de 4 kegels van den bundel. Deze punten leveren even zoo vele samenvallingen van de verwantschap (6, 6) tusschen de vlakkenbundels, welke men verkrijgt door a te verbinden met de beide rechten, die elkaar in A ontmoeten.

De overige 4 samenvallingen worden vertegenwoordigd door de raakvlakken in 2 punten, waar a door oppervlakken van den bundel aangeraakt wordt; immers met zulk een vlak α komen slechts 4 niet met α vereenigde vlakken overeen. Hieruit volgt, dat het regelvlak een dubbelkromme van den graad 17 bezit, die door de vier kegeltoppen gaat en α tot koorde heeft. (J. D. V.).

Vraagstuk CLXXXVIII.

N° 2 j. Hoeveel quadratische oppervlakken door zeven gegeven punten snijden een gegeven rechte lijn loodrecht?

(Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. W. BOUWMAN, F. SCHUH *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. W. BOUWMAN.

1. De quadratische oppervlakken door zeven gegeven punten vormen een net. Wij denken ons dit net bepaald door de drie oppervlakken

$$A \equiv a_1x^2+2a_2xy+2a_3xz+a_4y^2+2a_5yz+a_6z^2+2a_7x+2a_8y+2a_9z+a_{10}=0;$$

$$B \equiv b_1x^2+2b_2xy \ldots + b_{10}=0 \quad ; \quad C \equiv c_1x^2+2c_2xy \ldots + c_{10}=0,$$

dus door de vergelijking

$$\kappa A + \lambda B + \mu C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Nemen wij nu de Xas als de gegeven rechte.

Voor de oppervlakken, die door een punt $(x, 0, 0)$ gaan, hebben we

$$\kappa(a_1x^2+2a_7x+a_{10})+\lambda(b_1x^2+2b_7x+b_{10})+\mu(c_1x^2+2c_7x+c_{10})=0 \ . \ . \ 2),$$

en de vergelijking der raakvlakken in dit punt is

$$\left.\begin{array}{l} (X-x)\{\kappa(a_1x+a_7)+\lambda(b_1x+b_7)+\mu(c_1x+c_7)\}+ \\ +Y\{\kappa(a_2x+a_8)+\lambda(b_2x+b_8)+\mu(c_2x+c_8)\}+ \\ +Z\{\kappa(a_3x+a_9)+\lambda(b_3x+b_9)+\mu(c_3x+c_9)\}=0 \end{array}\right\} \ . \ . \ 3).$$

Zal een dezer raakvlakken loodrecht staan op de Xas, dan moet voldaan zijn aan de voorwaarden

$$\kappa(a_2x+a_8)+\lambda(b_2x+b_8)+\mu(c_2x+c_8)=0 \quad . \ . \ . \ . \quad 4),$$

$$\kappa(a_3x+a_9)+\lambda(b_3x+b_9)+\mu(c_3x+c_9)=0 \quad . \ . \ . \ . \quad 5).$$

Elimineeren wij κ, λ, μ uit de vergelijkingen 2), 4), 5), dan blijkt het, dat de bedoelde punten opgeleverd worden door de vergelijking

$$\begin{vmatrix} a_1x^2+2a_7x+a_{10} & b_1x^2+2b_7x+b_{10} & c_1x^2+2c_7x+c_{10} \\ a_2x+a_8 & b_2x+b_8 & c_2x+c_8 \\ a_3x+a_9 & b_3x+b_9 & c_3x+c_9 \end{vmatrix} = 0 \ . \ . \ 6).$$

Dus is de Xas normaal voor vier oppervlakken.

2. De raakvlakken, in een willekeurig punt (x, y, z) aan de oppervlakken van het gegeven net worden voorgesteld door

$$\left.\begin{aligned}(X-x)\left(\kappa\frac{dA}{dx}+\lambda\frac{dB}{dx}+\mu\frac{dC}{dx}\right)+\\+(Y-y)\left(\kappa\frac{dA}{dy}+\lambda\frac{dB}{dy}+\mu\frac{dC}{dy}\right)+\\+(Z-z)\left(\kappa\frac{dA}{dz}+\lambda\frac{dB}{dz}+\mu\frac{dC}{dz}\right)\end{aligned}\right\}=0 \quad \ldots\ldots 7).$$

Zal een dezer raakvlakken loodrecht op de X-as staan, dan moeten we hebben

$$\kappa\frac{dA}{dy}+\lambda\frac{dB}{dy}+\mu\frac{dC}{dy}=0 \quad \ldots\ldots 8)$$

$$\kappa\frac{dA}{dz}+\lambda\frac{dB}{dz}+\mu\frac{dC}{dz}=0 \quad \ldots\ldots 9),$$

waaruit met behulp van 1) valt af te leiden

$$D\equiv\begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{dA}{dy} & \frac{dB}{dy} & \frac{dC}{dy} \\ \frac{A}{dz} & \frac{dB}{dz} & \frac{dC}{dz}\end{vmatrix}=0 \quad \ldots\ldots 10).$$

Doorloopt (x, y, z) een gegeven kromme $\chi=0$, $\psi=\theta$, dan zal in de snijpunten van $D=0$, $\chi=\theta$, $\psi=0$ een raakvlak mogelijk zijn loodrecht op de X-as. In ons geval is $\chi\equiv y=0$, $\psi\equiv z=0$, terwijl D van den vierden graad is; men vindt dus vier zulke punten.

Oplossing *van* Dr. J. de Vries.

Een vlak ϕ loodrecht op de gegeven rechte n wordt door het oppervlakkennet gesneden volgens een net van kegelsneden. De dubbelpunten der hiertoe behoorende ontaarde kegelsneden liggen in een kromme van den derden graad; zij zijn raakpunten van ϕ met oppervlakken van het net. Verplaatst men ϕ evenwijdig aan zich zelf, dan zullen die raakpunten een opper-

vlak doorloopen, dat de oneindig ver gelegen rechte l_∞ van ϕ bevat.

Daar l_∞ in elk van haar punten slechts door een oppervlak van het net wordt geraakt, is ze een enkelvoudige rechte van het bedoelde oppervlak. Dus is de m.pl. der raakpunten met vlakken van bundel (ϕ) een oppervlak van den vierden graad, en is π normaal van vier oppervlakken van het net.

Vraagstuk CLXXXIX.

L^2 3 b. Men vraagt de vergelijking van de meetkundige plaats der middelpunten van alle bij een quadratisch oppervlak behoorende regelmatige poolviervlakken. (Dr. J. DE VRIES.)

Oplossing *van* Dr. J. DE VRIES.

Is de bol

$$U \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \rho^2 = 0$$

beschreven om een poolviervlak van de ellipsoïde

$$U' \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

dan verdwijnt de invariant Θ' van U en U' (notatie van SALMON). Men heeft dus de voorwaarde

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \rho^2 + a^2 + b^2 + c^2.$$

Is dit poolviervlak regelmatig, dan raken zijn zijvlakken aan den bol

$$U_0 \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \tfrac{1}{9}\rho^2 = 0,$$

en moet de invariant Θ van U_0 en U' verdwijnen. Derhalve moet tevens voldaan worden aan de voorwaarde

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1 + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{\rho^2}{9}.$$

Door eliminatie van ρ tusschen de beide voorwaarden, vindt men voor de m.pl. der middelpunten (α, β, γ) van de bedoelde poolviervlakken, na eenige herleiding,

$$(a^2b^2+a^2c^2-8b^2c^2)\alpha^2+(a^2b^2+b^2c^2-8a^2c^2)\beta^2+(a^2c^2+b^2c^2-8a^2b^2)\gamma^2 = (a^2-b^2)^2c^2+(b^2-c^2)^2a^2+(c^2-a^2)^2b^2.$$

Men ziet gemakkelijk, dat deze vergelijking nooit een ellipsoïde voorstelt.

De hier gevolgde methode is een uitbreiding van de handelwijs, waardoor R. A. ROBERTS de m.pl. der middelpunten van de gelijkzijdige pooldriehoeken der ellips heeft bepaald (zie vraagstuk 119, bl. 232).

Vraagstuk CXC.

R 8 a α. In een willekeurig punt P van een lichaam van onveranderlijke gedaante, dat in rust verkeert en waarvan één punt vast is, grijpt een impulsie van gegeven grootte aan. In welke richting moet die impulsie werken, opdat de levende kracht, die het lichaam verkrijgt, maximum zij? (Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* C. VAN ALLER, Mevr. A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF *en* F. SCHUH.

Oplossing *van* C. VAN ALLER.

Nemen we de hoofdassen van traagheid, die door het vaste punt O gaan, tot coördinaatassen aan. Zijn A, B, C de traagheidsmomenten van het lichaam ten opzichte van die assen, x_0, y_0, z_0 de coördinaten van het punt P, α, β, γ de richtingshoeken van de impulsie, I de grootte der impulsie, p, q, r de ontbondenen langs de coördinaatassen van de hoeksnelheid, die het lichaam ten gevolge der impulsie verkrijgt, dan volgt uit het theorema van de momenten der hoeveelheden van beweging

$$I(y_0 \cos\gamma - z_0 \cos\beta) = Ap,$$
$$I(z_0 \cos\alpha - x_0 \cos\gamma) = Bq,$$
$$I(x_0 \cos\beta - y_0 \cos\alpha) = Cr.$$

Er wordt nu gevraagd voor welke waarden van α, β, γ

$$T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

eene maximumwaarde verkrijgt.

Uit het voorgaande volgt

$$\frac{T}{I^2} = \frac{(y_0\cos\gamma - z_0\cos\beta)^2}{A} + \frac{(z_0\cos\alpha - x_0\cos\gamma)^2}{B} + \frac{(x_0\cos\beta - y_0\cos\alpha)^2}{C}.$$

We trekken uit het vaste punt O een lijn in de richting (α, β, γ) en zetten daarop een stuk af, dat omgekeerd evenredig is met den vierkantswortel uit T; indien α, β en γ veranderlijk worden gedacht, is de meetkundige plaats van het daardoor verkregen punt een oppervlak. Het is duidelijk, dat de kleinste voerstraal van dat oppervlak de richting aangeeft waarin de levende kracht maximum wordt.

Door te stellen

$$x = \frac{I}{\sqrt{T}} \cos \alpha, \quad y = \frac{I}{\sqrt{T}} \cos \beta, \quad z = \frac{I}{\sqrt{T}} \cos \gamma$$

vindt men, met behulp van de bovenstaande waarde van T, voor de vergelijking van het bedoelde oppervlak

$$\frac{(y_0 z - z_0 y)^2}{A} + \frac{(z_0 x - x_0 z)^2}{B} + \frac{(x_0 y - y_0 x)^2}{C} = 1.$$

Dit is de vergelijking van een cylindervlak, dat de lijn $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$ tot as heeft. In de richting der as, dus in de richting PO of OP, is de voerstraal van het oppervlak oneindig groot en de levende kracht, door de impulsie veroorzaakt, bijgevolg nul. Deze uitkomst was te voorzien, daar het punt O een vast punt is. De kleinste voerstraal van het cylindervlak moet gezocht worden in het vlak door O loodrecht op de as van het cylindervlak; deze doorsnede is in 't algemeen een ellips. Blijkbaar valt dus de gevraagde richting langs de kleine as van deze ellips. Is de cylinder een omwentelingsoppervlak, dus de loodrechte doorsnede een cirkel, dan zal de levende kracht, die het lichaam verkrijgt, maximum worden in elke richting loodrecht op de as.

Vraagstuk CXCI.

K 8 a. Zijn I_1, I_2, I_3, I_4 en i_1, i_2, i_3, i_4 de middelpunten der vierkanten die buitenwaarts en binnenwaarts op de zijden van van een vierhoek $A_1A_2A_3A_4$ beschreven worden, dan is de som der vierkanten op I_1I_3 en i_1i_3 even groot als de som der vierkanten op de diagonalen A_1A_3, A_2A_4. (Dr. H. VAN AUBEL.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, Dr. H. VAN AUBEL, Dr. W. BOUWMAN, E. D. J. DE JONGH Jr., Dr. A. J. A. PRANGE *en* Dr C. STOLP.

Oplossing *van* T. J. ALLERSMA.

Trekken wij (zie fig. 13) door de middens m_1, m_2, m_3, m_4 van de zijden A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 lijnen, die loodrecht op deze zijden staan en nemen wij hierop de stukken

$$m_1I_1 = m_1i_1 = \tfrac{1}{2}\,A_1A_2 \quad , \quad m_2I_2 = m_2i_2 = \tfrac{1}{2}\,A_2A_3,$$
$$m_3I_3 = m_3i_3 = \tfrac{1}{2}\,A_3A_4 \quad , \quad m_4I_4 = m_4i_4 = \tfrac{1}{2}\,A_4A_1,$$

dan zijn I_1, I_2, I_3, I_4, i_1, i_2, i_3, i_4 de middelpunten der bedoelde vierkanten.

Nu is

$$\angle I_3A_3m_3 = \angle i_2A_3m_2 = 45^\circ,$$

dus

$$\angle I_3A_3i_2 = \angle m_3A_3m_2,$$

en daar verder

$$A_3I_3 : A_3m_3 = A_3i_2 : A_3m_2 = \sqrt{2} : 1,$$

heeft men

$$\Delta\, A_3i_2I_3 \sim \Delta\, A_3m_2m_3,$$

dus

$$i_2I_3 : m_2m_3 = \sqrt{2} : 1.$$

Zoo voortgaande vindt men

$$i_2I_3 = m_2m_3\sqrt{2},\ I_3i_4 = m_3m_4\sqrt{2},\ i_4I_1 = m_4m_1\sqrt{2},\ I_1i_2 = m_1m_2\sqrt{2}.$$

Nu is $m_1m_2m_3m_4$ een parallelogram, dus

$$m_1m_2 = m_3m_4\,, \quad m_2m_3 = m_4m_1$$

alzoo ook

$$I_1i_2 = I_3i_4\,, \quad i_2I_3 = i_4I_1.$$

Daar verder de zijden van $\Delta\, A_3i_2I_3$ en $\Delta\, A_3m_2m_3$, zoo ook die van $\Delta\, A_4I_3i_4$ en $\Delta\, A_4m_3m_4$ 45° in stand verschillen, zoo is

$$\pm\angle i_2I_3i_4 = \angle m_2m_3m_4 - 2\times 45^\circ.$$

Hieruit blijkt dat $I_1i_2I_3i_4$ is een parallelogram, waarvan

$$i_2I_3 = m_2m_3\sqrt{2}\,,\ I_3i_4 = m_3m_4\sqrt{2}\,,\ \pm\angle i_2I_3i_4 = \angle m_2m_3m_4 - 90^\circ$$

Evenzoo blijkt dat $i_1 I_2 i_3 I_4$ is een parallelogram, waarvan

$$I_2 i_3 = m_2 m_3 \sqrt{2}, \quad i_3 I_4 = m_3 m_4 \sqrt{2}, \quad \pm \angle i_3 I_4 i_1 = \angle m_2 m_3 m_4 - 90^\circ.$$

Dus is

$$I_1 i_2 I_3 i_4 \cong I_4 i_3 I_2 i_1 \quad \text{en} \quad i_2 i_4 = i_1 i_3.$$

Nu is

$$I_1 I_3^2 + i_2 i_4^2 = 2 I_3 i_2^2 + 2 i_4 I_3^2 = 4 m_2 m_3^2 + 4 m_3 m_4^2.$$

Maar $i_2 i_4 = i_1 i_3$, dus vindt men

$$I_1 I_3^2 + i_1 i_3^2 = A_2 A_4^2 + A_1 A_3^2.$$

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

De punten I_k, i_k (zie fig. 14) zijn ook te beschouwen als middens van de halve cirkels op de zijden van den vierhoek als middellijnen beschreven. Hieruit volgt, dat men den vierhoek $I_1 i_1 I_3 i_3$ uit $A_1 A_2 A_3 A_4$ kan afleiden door de zijden $A_1 A_2$ en $A_3 A_4$ om haar middens M en M′ ieder een hoek van 90° in denzelfden zin om te draaien, waarbij dan de diagonalen $A_1 A_3$ en $A_2 A_4$ in $I_1 I_3$ en $i_1 i_3$ overgaan. Wij hebben dus alleen te bewijzen, dat bij die vervorming van den vierhoek de som $A_1 A_3^2 + A_2 A_4^2$ standvastig blijft.

Zijn L, L′ de middens van $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ en N, N′ die van $A_1 A_4$, $A_2 A_3$, dan bepalen die vier punten een parallelogram, welks zijden half zoo groot als $A_1 A_2$ en $A_3 A_4$ zijn en bovendien dezelfde hoeken met elkaar maken als laatstgenoemde zijden van den vierhoek. Draait men nu $A_1 A_2$ en $A_3 A_4$ zóó om de middelpunten M en M′ dat ze denzelfden hoek met elkaar blijven maken, dan wentelt het parallelogram LNL′N′ eenvoudig om zijn middelpunt O.

Daar M en M′ vast zijn, heeft het parallelogram MNM′N′ diagonalen van onveranderlijke lengte en is dus $MN^2 + NM'^2$ standvastig. Maar MN en NM′ zijn achtereenvolgens gelijk aan de helften van $A_2 A_4$ en $A_1 A_3$; dus blijft $A_1 A_3^2 + A_2 A_4^2$ gedurende de vervorming standvastig.

OPMERKING. Dezelfde redeneering toepassende op het parallelogram MLM′L′ vindt men de betrekking

$$A_1 A_4^2 + A_2 A_3^2 = I_1 i_3^2 + I_3 i_1^2.$$

Vraagstuk CXCII.

E 5. Men vraagt te bewijzen

$$e^{-y^m}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{y^n}{\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)}=$$

$$=1+m\int_0^y e^{-u^m}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}+\frac{u}{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}+\frac{u^2}{\Gamma\left(\frac{3}{m}\right)}+\ldots+\frac{u^{m-2}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)}\right\}du,$$

als m geheel, positief en grooter dan één is.

(Dr. J. C. Kluyver.)

Opgelost *door* Dr. J. C. Kluyver *en* Dr. C. Stolp.

Oplossing *van* Dr. C. Stolp.

Wanneer men het eerste lid der vergelijking, na verandering van y in u, differentieert, krijgt men

$$d\left[e^{-u^m}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{u^n}{\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)}\right]=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{me^{-u^m}u^{n-1}du}{\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)}-$$

$$-\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{me^{-u^m}u^{m+n-1}du}{\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)}.$$

Wanneer men verder in de laatste reeks het ranggetal n in $n-m$ verandert en in de voorlaatste, die feitelijk met den term $n=1$ begint, $\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)$ door $\frac{n}{m}\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)$ vervangt, wordt de vergelijking

$$d\left[e^{-u^m}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{u^n}{\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)}\right]=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{me^{-u^m}u^{n-1}du}{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}-$$

$$-\sum_{n=m}^{n=\infty}\frac{me^{-u^m}u^{n-1}du}{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}=me^{-u^m}\sum_{n=1}^{n=m-1}\frac{u^{n-1}du}{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}.$$

De integratie tusschen de grenzen $u = 0$ en $u = y$ geeft nu

$$e^{-y^m} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y^n}{\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)} = C + m \int_0^y e^{-u^m} \sum_{n=1}^{n=m-1} \frac{u^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)} du.$$

Door hierin $y = 0$ te stellen vindt men $C = 1$. Deze waarde van C in de vorige vergelijking substitueerende krijgt men de vergelijking, waarvan de juistheid bewezen moest worden.

OPMERKING. Uit deze uitkomst valt nog af te leiden

$$\lim_{y=\infty} e^{-y^m} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{y^n}{\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)} = m,$$

wat ook nog geldt voor $m = 1$. (J. C. K.)

Vraagstuk CXCIII.

M² 9 e. De tangentiaalvergelijking te bepalen van de omhullende der vlakken, welke vier gegeven rechten in punten van een cirkel snijden. (J. NEUBERG.)

Oplossing *van* Dr. W. BOUWMAN.

Wij stellen de vier gegeven rechten voor door

$$\begin{cases} a_i x + b_i y + c_i z + 1 = 0, \\ a'_i x + b'_i y + c'_i z + 1 = 0, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Zij de vergelijking van het bewegende vlak

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

De coördinaten der vier snijpunten zijn dan

$$x_i = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & v & w \\ 1 & b_i & c_i \\ 1 & b'_i & c'_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v & w \\ a_i & b_i & c_i \\ a'_i & b'_i & c'_i \end{vmatrix}}; \quad y_i = -\frac{\begin{vmatrix} u & 1 & w \\ a_i & 1 & c_i \\ a'_i & 1 & c'_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v & w \\ a_i & b_i & c_i \\ a'_i & b'_i & c'_i \end{vmatrix}}; \quad z_i = -\frac{\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ a_i & b_i & 1 \\ a'_i & b'_i & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v & w \\ a_i & b_i & c_i \\ a' & b'_i & c'_i \end{vmatrix}}.$$

De voorwaarde dat deze vier punten op een cirkel liggen, is vervuld, wanneer een bol kan gelegd worden door deze vier punten en een willekeurig vijfde punt, waarvoor we eenvoudigheidshalve den oorsprong kiezen.

Dus moet voldaan worden aan de betrekking

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Voegen we hierin de waarden voor x_i, y_i, z_i in, dan hebben we de bedoelde tangentiaalvergelijking.

Opmerking. Door gebruik te maken van het beginsel van het behoud van het aantal, kan men gemakkelijk inzien dat de omhullende der bedoelde vlakken van de zevende klasse is. Daartoe heeft men te bepalen hoeveel cirkels waarvan het vlak door de rechte a gaat, op vier gegeven rechten l_k rusten. Neemt men a als als snijlijn van l_1, l_2 en l_3 aan, dan zal de cirkel, die in het vlak (al_1) ligt en door de doorgangen van l_2, l_3 en l_4 gaat, twee oplossingen vertegenwoordigen, omdat hij l_1 in twee punten snijdt. Hetzelfde geldt omtrent de overeenkomstige, in de vlakken (al_2) en (al_3) gelegen, cirkels. Ten slotte wordt een zevende oplossing vertegenwoordigd door het samenstel van de lijn a met de oneindig ver gelegen rechte van het vlak, dat men door a evenwijdig met l_4 kan leggen. (Red.)

Vraagstuk CXCIV.

0 8 e. Twee punten P en P′ beschrijven gelijktijdig projectieve puntenreeksen. Als de snelheid van P bekend is, vraagt men de snelheid van P′ te bepalen, als behalve het paar P, P′ nog de paren A, A′ en B, B′ gegeven zijn. (J. Neuberg.)

Opgelost *door* Dr. W. Bouwman, Dr. C. Stolp *en* Dr. H. de Vries.

Oplossing *van* Dr. C. Stolp.

Wanneer P en P′ projectieve puntenreeksen beschrijven, omhult de rechte PP′ een kegelsnede. In ons vraagstuk is die

kegelsnede bepaald door vijf raaklijnen, n.l. de dragers der puntenreeksen benevens de rechten AA′, BB′ en PP′. De bepaling van de op deze rechten gelegen raakpunten is als een bekende constructie te beschouwen, waarom wij het op de rechte PP′ gelegen raakpunt T als een gegeven punt aannemen.

Zij t de tijd, dien P en P′ gebruiken om in Q en Q′ te komen, O het snijpunt van PQ en P′Q′, T_1 dat van PP′ en QQ′. De snelheden v en v' der punten P en P′ zijn dus de grenswaarden van de quotiënten $PQ : t$ en $P'Q' : t$, als t tot nul nadert. Dan valt Q samen met P, Q′ met P′ en T_1 met het bovengenoemde raakpunt T. Beschouwen wij QQ′ als een transversaal van driehoek OPP′, dan hebben wij volgens de stelling van MENELAÜS

$$P'Q' \times PT_1 \times OQ = OQ' \times P'T_1 \times PQ.$$

Deelen wij de factoren P′Q′ en PQ door t en gaan wij over tot de grenswaarden voor $t = 0$, dan vinden wij

$$v' \times PT \times OP = OP' \times P'T \times v,$$

waarin alleen v' onbekend is. Door invoering van een tweede onbekende V kan men de laatste vergelijking nog vervangen door de evenredigheden

$$OP : OP' = v : V.$$
$$PT : P'T = V : v',$$

waaruit de constructie van V en v' voldoende blijkt.

Vraagstuk CXCV.

Q 2. Een in een ruimte van vier afmetingen gegeven onveranderlijk ruimtestelsel wordt zoo om den oorsprong O van een rechthoekig coördinatenstelsel gedraaid, dat de projecties P_{12} en P_{34} van een willekeurig gekozen punt P, op de vlakken $O(X_1X_2)$ en $O(X_3X_4)$, met onveranderlijke snelheden cirkels om O beschrijven. Welke baan doorloopt de projectie P_{23}? (Dr. P. H. SCHOUTE.)

Opgelost *door* Dr. S. L. VAN OSS *en* Dr. H. DE VRIES.

Oplossing.

Wanneer de punten P_{12} en P_{34} in de vlakken $O(X_1X_2)$ en $O(X_3X_4)$ met standvastige snelheden cirkels om O beschrijven,

dan voeren de punten P_2 en P_3 op de assen OX_2 en OX_3 harmonische bewegingen uit, om O als evenwichtsstand. De samenstelling dezer twee bewegingen in het vlak $O(X_2X_3)$ levert voor de baan van P_{23} de figuren van LISSAJOUS op, die, al naar gelang van het phaseverschil der beide bewegingen op de assen, verschillende gedaanten vertoonen. (Zie P. H. SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie*, I, p. 231, Aufgabe 250).

OPMERKINGEN VAN Dr. S. L. VAN OSS. In het bijzondere geval, dat de bewegingen van P_{12} en P_{34} van dezelfde periode zijn, worden deze figuren ellipsen; bevindt zich bovendien P in een der vlakken OX_2X_3 of OX_4X_1, dan worden de kleine assen dezer ellipsen nul en P_{23}, P_{41} nemen enkelvoudig harmonische bewegingen aan, van dezelfde periode en $\frac{1}{4}\pi$ in phase verschillend.

Dit alles blijkt onmiddellijk, wanneer men den overgang van het projectiestelsel 12—34 op 23—41 uitvoert in den op het vlak van teekening neergeslagen vlakkencyclus OX_1X_2, OX_2X_3, OX_3X_4, OX_4X_1.

De eenvoudige beschouwing der figuur, welke het laatstgenoemde geval voorstelt, stelt ons in staat de eigenschappen der „gelijkbeenige dubbeldraaiing" vast te stellen.

Merken we eerst op, dat de ligging van P in OX_2X_3 of in OX_4X_1 niet als bijzonder geval geldt, daar door elk punt van R_4 een vlak kan gebracht worden, dat elk der beide vlakken OX_1X_2 en OX_3X_4 rechthoekig volgens een lijn snijdt, welk vlak als coördinatenvlak mag gelden.

We vinden dan:

1°. Elk punt heeft een eenparige cirkelbeweging om O, die de resultante is van twee onderling loodrechte enkelvoudig harmonische bewegingen met phaseverschil.

2°. Het baanvlak van een punt vormt met elk der draaivlakken OX_1X_2 en OX_3X_4 een paar gelijke standhoeken.

3°. De baanvlakken kunnen twee aan twee in normale paren aan elkaar toegevoegd worden, die even goed als OX_1X_2 en OX_3X_4 als rotatievlakken kunnen gelden.

De onder 2° genoemde eigenschap breidt zich dientengevolge uit tot:

4°. Elk tweetal baanvlakken heeft een paar gelijke standhoeken, of:

de vlakken die als rotatievlakken kunnen gelden van een gelijkbeenige dubbeldraaiing vormen een stelsel, zoo dat elk tweetal een paar gelijke standhoeken heeft.

Ten slotte merken we nog op, dat er ten opzichte van een paar normale vlakken twee van zulke stelsels bestaan, die men kan onderscheiden door de tegenstelling rechts- en links-gelijkbeenig. Deze twee stelsels behooren tot de gelijkbeenige dubbeldraaiingen, die uit elkaar ontstaan door omkeering van een der componenten, welke bewegingen men eveneens door de tegenstelling rechts en links onderscheidt. Men stelt dan het begrip rechts en links zoo vast, dat bij een rechts-gelijkbeenige dubbeldraaiing een rechts-gelijkbeenig vlakkenstelsel behoort.

Opmerking van Dr. P. H. Schoute. De door den Heer Van Oss aangewezen bijzonderheden van het bijzonder geval worden gemakkelijk analytisch bevestigd met behulp van de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\cos(\phi t+\lambda) \\ x_2 &= a\sin(\phi t+\lambda) \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x_3 &= b\cos(\phi t+\mu) \\ x_4 &= b\sin(\phi t+\mu) \end{aligned}\right\},$$

waaruit voor de vergelijkingen van het baanvlak

$$\left.\begin{aligned} bx_1 &= a\{x_3\cos(\lambda-\mu) - x_4\sin(\lambda-\mu)\} \\ bx_2 &= a\{x_3\sin(\lambda-\mu) + x_4\cos(\lambda-\mu)\} \end{aligned}\right\}$$

gevonden wordt, enz.

Vraagstuk CXCVI.

R 8 a. Van een vrij beweegbaar lichaam van onveranderlijke gedaante is de snelheid in een bepaald punt P gegeven. Men vraagt te bewijzen, dat de bewegingstoestand ondubbelzinnig bepaald is, als men weet dat het lichaam door een in P aangebrachten stoot tot rust te brengen is. (F. Schuh.)

Opgelost *door* Mevr. A. G. Kerkhoven—Wijthoff *en* F. Schuh.

Oplossing *van* F. Schuh.

Nemen we het zwaartepunt G als oorsprong en de hoofdtraagheidsassen van G als assen van een coördinatenstelsel aan. Zijn

u, v en w de snelheidscomponenten van G en ϕ, ψ en χ de rotatiesnelheden om de assen; zijn verder v_x, v_y en v_z de gegeven snelheidscomponenten van P (a, b, c) dan is

$$v_x = u + c\psi - b\chi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1),$$

$$v = v + a\chi - c\phi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2),$$

$$v_z = w + b\phi - a\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3).$$

Zijn $\overline{X}$, $\overline{Y}$ en $\overline{Z}$ de componenten van den stoot die het lichaam in rust brengt, m de massa van het lichaam en ρ_x, ρ_y, ρ_z de hoofdtraagheidstralen, dan is

$$-mu = \overline{X} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4),$$

$$-mv = \overline{Y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5),$$

$$-mw = \overline{Z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6),$$

$$-m\rho_x^2\phi = \overline{Z}b - \overline{Y}c \quad \ldots\ldots \quad 7),$$

$$-m\rho_y^2\psi = \overline{X}c - \overline{Z}a \quad \ldots\ldots \quad 8),$$

$$-m\rho_z^2\chi = \overline{Y}a - \overline{X}b \quad \ldots\ldots \quad 9).$$

Uit de vergelijkingen 1) ... 9) moeten we nu u, v, w, ϕ, ψ en χ oplossen. Uit 4) ... 9) volgt

$$\rho_z^2\phi = wb - vc \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10),$$

$$\rho_y^2\psi = uc - wa \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11),$$

$$\rho_z^2\chi = va - ub \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12).$$

Worden de hieruit voortvloeiende waarden van ϕ, ψ, χ in 1), 2) en 3) gesubstitueerd, dan vinden we

$$v_x\rho_y^2\rho_z^2 = u(\rho_y^2\rho_z^2 + b\rho_y^2 + c\rho_z^2) - ab\rho_y^2 v \qquad - ac\rho_z^2 w \ldots 13),$$

$$v_y\rho_z^2\rho_z^2 = -ab\rho_z^2 u \quad + v(\rho_z^2\rho_z^2 + a^2\rho_z^2 + c^2\rho_z^2) - bc\rho_z^2 w \ldots 14),$$

$$v_z\rho_z^2\rho_y^2 = -ac\rho_z^2 u \quad - bc\rho_y^2 v \quad + w(\rho_z^2\rho_y^2 + a^2\rho_z^2 + b^2\rho_y^2) \ldots 15).$$

Uit de laatste drie vergelijkingen kunnen we u, v en w oplossen. We vinden

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{a[a^2\rho_z^2][av_x] + a[av_x\rho_z^2(\rho_y^2+\rho_z^2)] - a\rho_y^2\rho_z^2[av_x] + v_x\rho_y^2\rho_z^2[a^2] + v_x\rho_z^2\rho_y^2\rho_z^2}{\rho_z^2\rho_y^2\rho_z^2 + [a^2\rho_z^2][a^2] + [a^2\rho_z^2(\rho_y^2+\rho_z^2)]} = \\ &= \frac{a[a^2\rho_z^2][av_x] + a\rho_z^2\{av_x(\rho_y^2+\rho_z^2) + bv_y\rho_y^2 + cv_z\rho_z^2\} + v_x\rho_y^2\rho_z^2(\rho_z^2+b^2+c^2)}{\rho_z^2\rho_y^2\rho_z^2 + [a^2\rho_z^2][a^2] + [a^2\rho_z^2(\rho_y^2+\rho_z^2)]} \end{aligned}\right\} 16),$$

waarin een paar vierkante haakjes op een som van 3 termen wijst, die men door cyclische letterverwisseling krijgt; b.v. $[a^2\rho_x^2] \equiv a^2\rho_x^2 + b^2\rho_y^2 + c^2\rho_z^2$. Voor v en w krijgt men dergelijke uitdrukkingen, die men door cyclische letterverschuiving uit die voor u afleidt. Uit 10), 11) en 12) vindt men dan ϕ, ψ en χ.

Zoo vindt men

$$\left.\begin{aligned}\phi &= \frac{(bv_z - cv_y)(\rho_y^2\rho_z^2 + [a^2\rho_x^2]) - a[a\rho_x^2(bv_z - cv_y)]}{\rho_x^2\rho_y^2\rho_z^2 + [a^2\rho_x^2][a^2] + [a^2\rho_x^2(\rho_y^2 + \rho_z^2)]} = \\ &= \frac{(bv_z - cv_y)(\rho_y^2\rho_z^2 + b^2\rho_y^2 + c^2\rho_z^2) - ab\rho_y^2(cv_x - av_z) - ac\rho_z^2(av_y - bv_x)}{\rho_x^2\rho_y^2\rho_z^2 + [a^2\rho_x^2][a^2] + [a^2\rho_x^2(\rho_y^2 + \rho_z^2)]}\end{aligned}\right\} 17).$$

De bewegingstoestand van het lichaam is dus ondubbelzinnig bepaald, daar de noemer der breuken, die u, v, w, ϕ, ψ en χ voorstellen, nooit nul is. Dit zou alleen nog het geval kunnen zijn als een der hoofdtraagheidsstralen, b.v. ρ_x, nul was en bovendien $b = c = 0$, dus voor

$$\rho_x = 0 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad c = 0;$$

het lichaam is dan een staaf en P ligt op die staaf.

Dan leveren de vergelijkingen 1), 2), 3), 10), 11) en 12)

$$\begin{aligned} v_x &= u, \\ v_y &= v + a\chi, \\ v_z &= w - a\psi, \\ \rho_y^2\psi &= -wa, \\ \rho_z^2\chi &= va, \end{aligned}$$

waaruit men afleidt

$$u = v_x \quad , \quad v = \frac{v_y\rho_z^2}{a^2 + \rho_z^2}, \quad w = \frac{v_z\rho_y^2}{a^2 + \rho_y^2}, \quad \psi = \frac{-av_z}{a^2 + \rho_y^2}, \quad \chi = \frac{av_y}{a^2 + \rho_z^2},$$

terwijl ϕ geheel willekeurig is; dit was te verwachten daar de rotatie ϕ geen bijdrage levert tot de levende kracht, noch tot de snelheid van P. Dit is het eenige geval waarbij de bewegingstoestand niet geheel bepaald is.

Den stoot, die noodig is om het lichaam in rust te brengen, vindt men als u, v en w bepaald zijn, uit 4), 5) en 6); men verkrijgt b.v.

$$\overline{X} = -m \frac{a[a^2\rho_x^2][av_x] + a\rho_x^2\{av_x(\rho_y^2+\rho_z^2) + bv_y\rho_y^2 + cv_z\rho_z^2\} + v_x\rho_y^2\rho_z^2(\rho_x^2+b^2+c^2)}{\rho_x^2\rho_y^2\rho_z^2 + [a^2\rho_x^2][a^2] + [a^2\rho_x^2(\rho_y^2+\rho_z^2)]} \quad 18)$$

Zijn de snelheidscomponenten van P v_x, v_y en v_z, maar is de bewegingstoestand van het lichaam niet zoo dat het door een stoot in P tot rust te brengen is, dan zal toch een stoot, waarvan de componenten de bovengevonden waarden hebben, het punt P in rust brengen, daar de verandering die een stoot in den bewegingstoestand van het lichaam, en dus ook van ieder punt van het lichaam, te weeg brengt, onafhankelijk is van de aanvankelijke bewegingstoestand. Hiermede hebben we dus tevens den stoot gevonden, die bij een willekeurigen bewegingstoestand van het lichaam een willekeurig punt P in rust brengt.

Men kan hieruit nog iets anders afleiden. In de eerste plaats vindt men dat de stoot, die P in rust brengt, alleen afhankelijk is van de snelheid van P en niet van de overige beweging van het lichaam. Daar de door den stoot verrichte arbeid of de toename van de levende kracht (die steeds negatief uitvalt) bepaald wordt door

$$A = \tfrac{1}{2}(\overline{X}v_x + \overline{Y}v_y + \overline{Z}v_z),$$

hangt ook die arbeid alleen van de beweging van P af.

De oorspronkelijke levende kracht van het lichaam bij gegeven snelheid van P zal dus des te kleiner zijn, naarmate de overblijvende levende kracht, nadat P door een stoot in P tot rust gebracht is, kleiner is. Nu is er een bewegingstoestand mogelijk, waarbij het geheele lichaam door een stoot in P tot rust kan gebracht worden, en dus de overblijvende levende kracht nul is; die bewegingstoestand zal dus tevens diegene zijn waarbij het lichaam, bij gegeven snelheid van P, de kleinste levende kracht heeft, terwijl de grootte dezer minimale levende kracht bepaald wordt door

$$-A = -\tfrac{1}{2}(\overline{X}v_x + \overline{Y}v_y + \overline{Z}v_z)$$

Hieruit volgt tevens dat de stoot, die P in rust brengt, steeds negatieven arbeid verricht, en dus een afname der levende kracht tengevolge heeft. De door den stoot verrichte arbeid is gegeven door

$$-\tfrac{1}{2}m\frac{[av_x]^2[a^2\rho_x^2]+[av_x\rho_x^2]^2+[a^2v_x^2\rho_x^2(\rho_y^2+\rho_z^2-\rho_x^2)]+[v_x^2\rho_y^2\rho_z^2(b^2+c^2)]+\rho_x^2\rho_y^2\rho_z^2[v_x^2]}{\rho_x^2\rho_y^2\rho_z^2+[a^2\rho_x^2][a^2]+[a^2\rho_x^2(\rho_y^2+\rho_z^2)]} \quad 19).$$

Ook hieruit ziet men dat deze arbeid negatief is.

Men kan zich ook afvragen hoe de beweging van een lichaam zijn moet, opdat het door een stoot in een enkel punt tot rust te brengen is. Daartoe heeft men na te gaan, hoe u, v, w, ϕ, ψ en χ moeten wezen opdat uit 4)...9) de grootheden $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, a, b en c opgelost kunnen worden. $\overline{X}$, $\overline{Y}$ en $\overline{Z}$ vindt men uit 4), 5) en 6), terwijl de vergelijkingen 10), 11) en 12) alleen dan voor a, b en c oplossingen toelaten als men heeft

$$\rho_x^2\phi u + \rho_y^2\psi v + \rho_z^2\chi w = 0.$$

Is echter aan deze voorwaarde voldaan, dan zijn de vergelijkingen 10), 11) en 12) afhankelijk, en is er dus een lijn van punten waar de stoot zoo kan worden aangebracht dat het lichaam tot rust komt. Dit was ook te verwachten, daar als er een stoot is, die het lichaam in rust brengt, het aangrijpingspunt van dien stoot willekeurig kan genomen worden op de op de rechte lijn, volgens welke de stoot werkt, en dus het lichaam in rust komt door een willekeurig punt van die lijn vast te houden. Is aan de voorwaarde $[\rho_x^2\phi u] = 0$ voldaan, dan ontbreekt deze lijn alleen dan, als $u = v = w = 0$ is; het lichaam kan dan niet door een enkelen stoot in rust gebracht worden, tenzij tevens $\phi = \psi = \chi = 0$ en dus het lichaam reeds in rust is.

Vraagstuk CXCVII.

K 2 d. De normale coördinaten van een punt der hyperbool van KIEPERT zijn evenredig met $\sin^{-1}(A-\varphi)$, $\sin^{-1}(B-\varphi)$, $\sin^{-1}(C-\varphi)$, terwijl ze voor een punt der verbindingslijn van het symmediaanpunt K met het hoogtepunt H evenredig zijn met $\sin A + \cos B \cos C \operatorname{tg}\varphi$, $\sin B + \cos C \cos A \operatorname{tg}\varphi$, $\sin C + \cos A \cos B \operatorname{tg}\varphi$. Men vraagt te bewijzen, dat twee punten (φ_1) en (φ_2) der bedoelde hyperbool met een punt (φ_3) van KH collineair zijn, als voldaan is aan de betrekking $\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3 = 0$. (Dr. H. A. W. SPECKMAN.)

Opgelost *door* Dr. A. J. A. PRANGE, Dr. H. A. W. SPECKMAN *en* Dr. C. STOLP.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

De door (ϕ_1) en (ϕ_2) getrokken rechte l worde voorgesteld door de vergelijking

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Substitueert men hierin voor x, y en z de coördinaten van een punt der hyperbool van KIEPERT en ook die van een punt van KH, dan vindt men de vergelijkingen

$$\frac{\lambda}{\sin(A-\phi)} + \frac{\mu}{\sin(B-\phi)} + \frac{\nu}{\sin(C-\phi)} = 0,$$

$$\lambda(\sin A + \cos B \cos C \operatorname{tg}\phi) + \mu(\sin B + \cos C \cos A \operatorname{tg}\phi) + \\ + \nu(\sin C + \cos A \cos B \operatorname{tg}\phi) = 0.$$

Ze laten zich herleiden tot de vormen

$$L \sin^2\phi - M \sin\phi \cos\phi + N \cos^2\phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 2),$$

$$L \sin\phi + M \cos\phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3),$$

waarin

$$L = \lambda \cos B \cos C + \mu \cos C \cos A + \nu \cos A \cos B,$$

$$M = \lambda \sin A + \mu \sin B + \nu \sin C,$$

$$N = \lambda \sin B \sin C + \mu \sin C \sin A + \nu \sin A \sin B.$$

De vergelijkingen 2) en 3) geven achtereenvolgens $\operatorname{tg}\phi_1 + \operatorname{tg}\phi_2 = M : L$ en $\operatorname{tg}\phi_3 = -M : L$; men heeft dus

$$\operatorname{tg}\phi_1 + \operatorname{tg}\phi_2 + \operatorname{tg}\phi_3 = 0.$$

OPMERKING. Dat KH de hyperbool van KIEPERT in H raakt, is gemakkelijk uit onze vergelijkingen af te leiden. Door l met KH te laten samenvallen maakt men 3) tot een identiteit, zoodat $L = M = 0$ wordt. Uit 2) vindt men dan eenvoudig $\cos^2\phi = 0$ of $\phi_1 = \phi_2 = 90°$. Voor de coördinaten van ϕ_1 heeft men dus $x : y : z = \sin^{-1}(A-90°) : \sin^{-1}(B-90°) : \sin^{-1}(C-90°)$ of wel

$$x \cos A = y \cos B = z \cos C.$$

Vraagstuk CXCVIII.

M² 9 e. Gegeven zijn de elkander kruisende rechten c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, k en l. Van welken graad is het oppervlak, dat gevormd wordt

door de vlakke kubische krommen, die l driemaal snijden, op k een keerpunt hebben en op elke der vijf rechten c rusten?

(Dr. J. DE VRIES.)

Opgelost *door* Dr. W. BOUWMAN, Dr. H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

Oplossing *van* Dr. H. DE VRIES *en* Dr. J. DE VRIES.

1. In elk vlak ε door l liggen twee krommen, die aan de vraag voldoen. Immers, door de vijf punten C_k (doorgangen der rechten c_k) gaan ∞^1 kubische krommen, die een dubbelpunt hebben in den doorgang K der rechte k. De dubbelpuntsraaklijnen vormen een quadratische involutie, waarin de dubbelstralen keerpuntsraaklijnen zijn van twee tot den bundel behoorende krommen.

Liggen vier der punten C_k in een rechte g, dan bestaat elke kubische kromme uit de rechte g, de rechte KC_5 en een andere door K getrokken rechte. De involutie der dubbelpuntsraaklijnen is nu parabolisch, en de dubbelstralen zijn vereenigd in de lijn KC_5. Het samenstel der rechte g en der dubbel gelegde rechte KC_5 vervangt derhalve twee kubische krommen met keerpunt in K.

2. Met behulp van het beginsel van het behoud van het aantal bepalen we nu het aantal kubische krommen, die aan de vraag voldoen en bovendien nog een rechte c_6 snijden.

Verplaatsen we c_1, c_2, c_3 en c_4 zoo, dat ze l snijden, dan kunnen slechts de vier vlakken (lc_1), (lc_2), (lc_3), (lc_4) eigenlijke kubische krommen bevatten. De beide in (lc_1) gelegen krommen (die bepaald zijn door de doorgangen van c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 en k) moeten evenwel elk driemaal in rekening worden gebracht, omdat ze c_1 in drie punten snijden. We hebben dus reeds 24 oplossingen gevonden.

Oneigenlijke kubische lijnen worden geleverd door het samenstel van de rechte l en een dubbel gelegde snijlijn van c_5, c_6, k en l. Volgens het bovenstaande moeten de beide aldus verkregen figuren elk dubbel geteld worden; het aantal oplossingen is dus 28. Het bedoelde oppervlak is derhalve van den 28en graad.

Vraagstuk CIC.

K 13. Als vijf punten zoo gelegen zijn dat men een vlak kan brengen door de voetpunten der loodlijnen, uit een dier punten neergelaten op de zijvlakken van het door de overige vier bepaalde viervlak, dan geldt deze eigenschap voor elk der vijf punten.

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* T. J. ALLERSMA, W. MANTEL, Dr. C. STOLP *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* W. MANTEL.

1. Bij elk punt P behoort een punt P_1, dat er isogonaal mede verwant is ten opzichte van een gegeven viervlak ABCD; het is bepaald door de volgende betrekkingen tusschen tweevlakkige hoeken

$$P_1ABC = DABP,\ P_1BCA = DBCP,\ P_1CAB = DCAP.$$

Zijn nu vijf punten, A, B, C, D, E, gegeven, dan kunnen wij een punt E_1 vinden, dat met E isogonaal verwant is ten aanzien van ABCD, en een punt D_1, dat met D isogonaal verwant is ten aanzien van ABCE. Wij hebben dan onder anderen de betrekkingen $E_1ABC = DABE$ en $DABE = CABD_1$, dus $E_1ABC = CABD_1$. Op dezelfde wijze vindt men $E_1BCA = ABCD_1$ en $E_1CAB = BCAD_1$. Hieruit volgt, dat D_1 en E_1 symmetrisch liggen ten aanzien van vlak ABC.

2. Als de voetpunten der loodlijnen uit E op de zijvlakken van het viervlak ABCD in een vlak liggen, dan valt het isogonaal verwant punt E_1 oneindig ver. Want, is C_0 het voetpunt der loodlijn uit E op ABD, D_0 het voetpunt der loodlijn uit E op ABD, G het snijpunt van AB met het vlak C_0D_0E, dan dan is C_0ED_0G een vierhoek met twee overstaande rechte hoeken, en ligt GE in den hoek C_0GD_0 antiparallel met de loodlijn uit G op C_0D_0. Het vlak door AB loodrecht op C_0D_0 zal dus het isogonaal verwante punt E_1 moeten bevatten. Zoo vindt men ter bepaling van E_1 steeds vlakken, die loodrecht staan op het vlak door de voetpunten. dus een oneindig ver gelegen snijpunt hebben.

3. Ligt E_1 oneindig ver, dan loopen de vier doorsneden der vlakken, welke E_1 uit de zes ribben projecteeren, onderling evenwijdig; de vlakken zelf zijn dus evenwijdig met een zekere

rechte l. Hieruit volgt, in verband met het bovenstaande, dat de vier voetpunten A_0, B_0, C_0, D_0 in een vlak liggen.

4. Het punt D_1 valt te gelijk met E_1 oneindig ver, omdat D_1 en E_1 symmetrisch liggen ten opzichte van ABC. Dus zullen ook de projecties van D op de zijvlakken van ABCE in één vlak liggen. En hiermede is de eigenschap bewezen.

Oplossing *van* Dr. C. STOLP.

1. Wij beschouwen vijf willekeurig in de ruimte gelegen punten A, B, C, P, Q, en construeeren het voetpuntenviervlak van P met betrekking tot QABC en dat van Q met betrekking tot PABC; elk dezer voetpuntenviervlakken heeft een hoekpunt in het vlak ABC. Zooals nader zal blijken, zijn de drievlakkenhoeken, die deze voetpunten tot toppen hebben, gelijk en gelijkvormig. Uit deze eigenschap volgt onmiddellijk, dat de ontaarding van een der voetpuntenviervlakken in een vlakke figuur de ontaarding der overige medebrengt, zoodat het bewijs van de genoemde eigenschap de oplossing van ons vraagstuk in zich sluit.

2. In de pyramiden PABC en QABC beschouwen wij drie zijvlakken, die door een der ribben l_i ($i = 1, 2, 3$) van het grondvlak ABC gaan, n.l. het grondvlak G, het vlak V_i, dat P, en het vlak W_i, dat Q bevat. Zijn nu P' en P_i de projecties van P op G en W_i, Q' en Q_i die van Q op G en V_i, dan vormen $P'P_i$ en $Q'Q_i$ twee overeenkomstige ribben van de drievlakkenhoeken, die in P' en Q' hun toppen hebben.

Wanneer (zie fig. 15) in het platte vlak drie rechten door één punt gaan, zijn de voetpuntendriehoeken van het puntenveld met betrekking tot die rechten gelijkvormig. Voor de punten der ruimte geldt natuurlijk dezelfde eigenschap met betrekking tot drie platte vlakken, die door ééne rechte gaan. In fig. 16 en fig. 17 zijn de voetpuntendriehoeken $P'PP_i$ en $Q'Q_iQ$ der punten P en Q met betrekking tot de door l_i gaande vlakken G, V_i en W_i voorgesteld [1]). Als gelijkstandige hoeken van gelijkvormige driehoeken zijn de hoeken P' en Q' even groot. Daar ze in evenwijdige vlakken liggen en bovendien $P'P$ evenwijdig is met $Q'Q$, zal men het been $Q'Q_i$ door een

[1]) Gemakshalve zijn ze in één plat vlak geteekend. Men denke ze zich in twee vlakken loodrecht op l_i

halve omwenteling om Q'Q als as evenwijdig met $P'P_i$ kunnen maken. De beenen der gelijke hoeken hebben dan gelijke of tegengestelde richtingen, naarmate P en Q aan denzelfden kant of aan weerskanten van G liggen.

Neemt men voor i achtereenvolgens 1, 2 en 3, dan ziet men onmiddellijk in, dat de drievlakkenhoek $Q'Q_1Q_2Q_3$ door een halve omwenteling om Q'Q als as een stand verkrijgt, waarbij de ribben gelijk of tegengesteld gericht zijn met die van den drievlakkenhoek $P'P_1P_2P_3$; deze drievlakkenhoeken zijn dus gelijk en gelijkvormig.

Vraagstuk CC.

M³ 5 h. Men vraagt het oppervlak te bepalen, dat gevormd wordt door de raakkoorden der puntbollen, welke een dubbele aanraking hebben met de kromme

$$x = \frac{a}{1+t^2},\ y = \frac{at}{1+t^2},\ z = bt.$$

(Dr. P. ZEEMAN Gz.)

Opgelost *door* Dr. J. DE VRIES *en* Dr. P. ZEEMAN Gz.

Oplossing *van* Dr. P. ZEEMAN Gz.

De snijpunten van den puntbol

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = 0$$

met de gegeven kromme worden bepaald door de vergelijking

$$\left(\frac{a}{1+t^2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{at}{1+t^2} - \beta\right)^2 + (bt-\gamma)^2 = 0.$$

Na herleiding vindt men hieruit

$$(1+t^2)\{b^2t^4 - 2b\gamma t^3 + (b^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t^2 - 2(a\beta+b\gamma)t + (a-\alpha)^2 + \beta^2 + \gamma^2\} = 0.$$

Laten wij den factor $(1+t^2)$, die gelijk aan nul gesteld, de imaginaire cirkelpunten van het vlak XOY bepaalt, waardoor de ruimtekromme gaat, buiten beschouwing, dan hebben we dus

$$b^2t^4 - 2b\gamma t^3 + (b^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t^2 - 2(a\beta+b\gamma)t + (a-\alpha)^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Zal de puntbol in de punten t_1 en t_2 met de kromme eene dubbele aanraking hebben, dan moet deze vergelijking identiek zijn met

$$(t - t_1)^2 (t - t_2)^2 = 0,$$

of als men stelt $t_1 + t_2 = u$, $t_1 t_2 = v$, met

$$t^4 - 2ut^3 + (u^2 + 2v)\, t^2 - 2uvt + v^2 = 0.$$

Er moet dus voldaan worden aan de voorwaarden

$$u = \frac{\gamma}{b}, \qquad u^2 + 2v = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + b^2}{b^2},$$

$$uv = \frac{a\beta + b\gamma}{b^2}, \qquad v^2 = \frac{(a - \alpha)^2 + \beta^2 + \gamma^2}{b^2}.$$

Door eliminatie van α, β en γ vindt men hieruit de volgende betrekking tusschen de parameters u en v

$$[a^2 + b^2 \{u^2 + (v - 1)^2\}]^2 - 4a^2b^2v^2 = 0,$$

die zich laat splitsen in de beide volgende vergelijkingen

$$b^2u^2 + \{b(v - 1) - a\}^2 - 2ab = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

en

$$b^2u^2 + \{b(v - 1) + a\}^2 + 2ab = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

De koorde, die de punten t_1 en t_2 der ruimtekromme verbindt, wordt bepaald door de beide vergelijkingen

$$(t_1t_2 - 1)x - (t_1 + t_2)y + a = 0,$$

$$(t_1 + t_2)(x - a) + (t_1t_2 - 1)\, y + \frac{az}{b} = 0,$$

of, als we ook hierin $t_1 + t_2$ door u en t_1t_2 door v vervangen, door

$$\left.\begin{aligned} (v - 1)x - uy + a &= 0 \\ u(x - a) + (v - 1)\, y + \frac{az}{b} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Deze vergelijkingen stellen dus de raakkoorde voor van een puntbol, die eene dubbele aanraking heeft met de gegeven kromme, wanneer slechts tusschen u en v de betrekking 1) of 2) bestaat. Eliminatie van u en v uit de vergelijkingen 1) en 3) of 2) en 3) levert dus de vergelijking op van de meetkundige plaats dier raakkoorden. Het door hen gevormde op-

pervlak bestaat dus uit twee deelen; zij worden voorgesteld door de vergelijkingen

$$a(by-xz)^2+a(x^2+y^2-ax+bx+yz-ab)^2-2b(x^2+y^2-ax)^2=0,$$

en $$a(by-xz)^2+a(x^2+y^2-ax+bx+yz-ab)^2+2b(x^2+y^2-ax)^2=0.$$

Het gevraagde oppervlak valt dus uiteen in twee biquadratische oppervlakken. Daar

$$by-xz=0,\ x^2+y^2-ax+bx+yz-ab=0,\ x^2+y^2-ax=0$$

de vergelijkingen zijn van drie quadratische regelvlakken door de gegeven kromme, zal deze op elk der beide biquadratische regelvlakken dubbelkromme zijn. De punten dier kromme zijn de eenige reëele punten van het tweede dezer oppervlakken.

Noemt men het middelpunt van een puntbol, die eene dubbele aanraking met een gegeven ruimtekromme heeft, een *brandpunt* dier kromme en de raakkoorde van dezen puntbol de bij dit brandpunt behoorende *richtlijn*, dan bleek vroeger (zie de oplossing van N°. 103), dat de meetkundige plaats der brandpunten uit twee biquadratische ruimtekrommen bestaat, waarvan de eene alleen imaginaire brandpunten bevat. In overeenstemming hiermee blijkt nu, dat de meetkundige plaats der richtlijnen uit twee biquadratische regelvlakken bestaat, waarvan het eene alleen imaginaire richtlijnen der kromme bevat.

REGISTER

OP DE

IN DEEL VIII VOORKOMENDE VRAAGSTUKKEN.

A 1 c. 2.
A 3 l. 142.
A 3 j. 14.
B 1 a. 161.
B 4 g. 127.
B 7 a. 49.
B 12 a. 49, 90.
C 1 d. 110.
C 1 g. 113.
D 1 b. 82.
D 2 b. 87.
D 2 b α. 20.
D 2 b β. 5, 86.
D 2 b γ. 30, 107.
D 6 f. 141.
D 6 l. 173, 174.
E 5. 21, 79, 169, 170, 192.
F 1 d. 88.
F 1 g. 44.
G 1. 6.
H 2 c. 9.
H 3 c. 109.
H 5 d. 12, 32.
H 5 g. 108.
H 5 j α. 171.
H 8 a. 111.
H 9 a. 112.
H 9 b. 140.
H 11 c. 80, 84.
I 9 b. 172.
J 2 c. 114, 115, 153, 180.
J 2 f. 152.
K 1 c. 40, 53, 59, 73, 74, 92, 93, 105, 118, 133, 146, 148.
K 1 d. 54, 96, 106.
K 2 d. 36, 41, 52, 197.
K 4. 56, 97, 175.
K 5 c. 61.
K 6 b. 85, 122.
K 8 a. 72. 191.
K 8 b. 155.
K 8 c. 35.
K 8 f. 24, 51.
K 9 a. 156.
K 11 e. 37.
K 13. 199.
K 13 b. 58.
K 13 c. 57, 128, 129, 144, 145.
K 14 c. 19.
K 14 c α. 38, 182.
K 17 e. 78.
K 18 g. 57.
K 20 a. 55.
K 20 c α. 181.
K 20 d. 15.
K 22. 183.
K 22 b. 91.
L¹ 2 b. 119.
L¹ 5 a. 46, 143.
L¹ 7 d. 22.
L¹ 11 c. 34.
L¹ 12 c. 98.
L¹ 15 f. 64, 116, 117.
L¹ 16 a. 1, 17, 25, 47, 60, 81, 89.
L¹ 16 b. 99.
L¹ 18 a. 120.
L¹ 18 b. 62.
L² 2 d. 136.
L² 2 e. 139.
L² 2 f. 77.
L² 3 b. 189.
L² 15 c. 3.
L² 17 a. 4.
L² 17 d. 27.
L² 17 h. 167, 168, 187.
L² 21 b. 137.
M¹ 1 b. 165.
M¹ 1 c. 83.
M¹ 1 d. 186.
M¹ 5 d. 76.
M¹ 5 g. 75.
M¹ 5 h. 185.
M¹ 5 k α. 154.
M¹ 6 l. 124.
M¹ 8 g. 65.
M² 1 c α. 31, 45.
M² 3 b. 33.
M² 3 h β. 123.
M² 4 e β, γ. 66.
M² 4 l δ. 138.
M² 7 c. 18.
M² 9 d α. 48, 94.
M² 9 e. 157, 193, 198.

M³ 5 a. 29.
M³ 5 c γ. 23.
M³ 5 h. 68, 70, 102, 103, 200.
M³ 5 h α. 159.
M³ 5 h β. 39.
M³ 6 a. 42.
M³ 6 g. 26.
M³ 6 l. 69.
N¹ 1 h. 132.
N² 1 g α. 184.
N⁴ 1 b. 125, 126.
N⁴ 1 d. 121.
N⁴ 2 j. 188.
O 2 g. 130.
O 3 j. 10.
O 4 c. 158.
O 4 d. 7.
O 4 g α. 100.
O 5 c. 16.
O 5 j. 43.
O 5 j α. 63.
O 5 l. 8.
O 6 a α. 28.
O 6 h. 11, 101.
O 7 a. 104.
O 8 e. 194.
P 1 b. 130, 131, 162.
P 1 e. 176.
P 6 f. 95, 147.
Q 2. 50, 149, 150, 151, 164, 177, 178, 195.
Q 4 a. 67, 71.
R 1 a. 163.
R 1 b. 135, 166.
R 1 c. 132.
R 2 b γ. 134.
R 7 b. 179.
R 8 a. 196.
R 8 a α. 160, 190.
R 9 b α. 13.

REGISTER

VOLGENS DE

NAMEN VAN DE STELLERS DER VRAGEN.

Aller (C. van) 161, 162.
Aubel (Dr. H. van) 1, 24, 25, 41, 53, 54, 72, 73, 74, 105, 106, 133, 191.
Barrau (J. A.) 134, 163, 164.
Bes (K.) 2.
Cardinaal (J.) 3, 4, 26, 27, 42, 75, 76, 77, 135, 136, 137, 138, 165, 166, 167, 168.
Godefroy (A. N.) 55, 56.
Griend (J. van de) 78.
Julius (Dr. V. A.) 107.
Kapteyn (Dr. W.) 5, 6, 7, 8, 28, 43, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 139, 140, 141, 169, 170, 171.
Kerkhoven—Wijthoff (A. G.) 85.
Kluyver (Dr. J. C.) 9, 10, 11, 29, 30, 44, 86, 87, 88, 172, 173, 174, 192.
Korteweg (Dr. D. J.) 31, 45, 114, 115.
Levänen (Dr. S.) 12, 32.
Mannoury (G.) 89, 90.
Mantel (W.) 13, 91, 142.
Neuberg (J.) 14, 15, 16, 17, 33, 34, 35, 46, 47, 57, 58, 59, 92, 93, 94, 95, 116, 117, 143, 144, 145, 146, 147, 175, 176, 193, 194.
Prange (Dr. A. J. A.) 36, 60, 96, 118, 148.
Schoute (Dr. P. H.) 18, 19, 37, 38, 48, 49, 50, 119, 120, 121, 122, 149, 150, 151, 177, 178, 195.
Schouten (Dr. G.) 179.
Schuh (F.) 152, 153, 180, 196.
Speckman (Dr. H. A. W.) 197.
Stolp (Dr. C.) 20, 21, 61, 97, 181, 182.
Vries (Dr. H. de) 98, 99, 183, 184, 185, 186.
Vries (Dr. J. de) 22, 39, 40, 51, 52, 62, 63, 100, 123, 124, 125, 126, 127, 154, 155 187, 188, 189, 198.
Zeeman (Dr. P.) 23, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 101, 102, 103, 104, 128, 129, 130, 131, 132, 156, 157, 158, 159, 160, 190, 199, 200.

REGISTER

VOLGENS DE

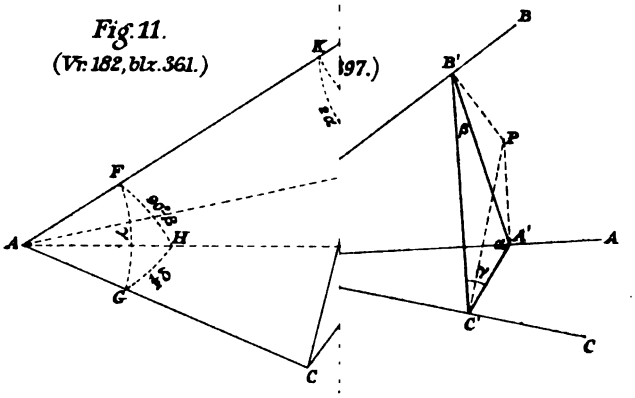
NAMEN DER OPLOSSERS.

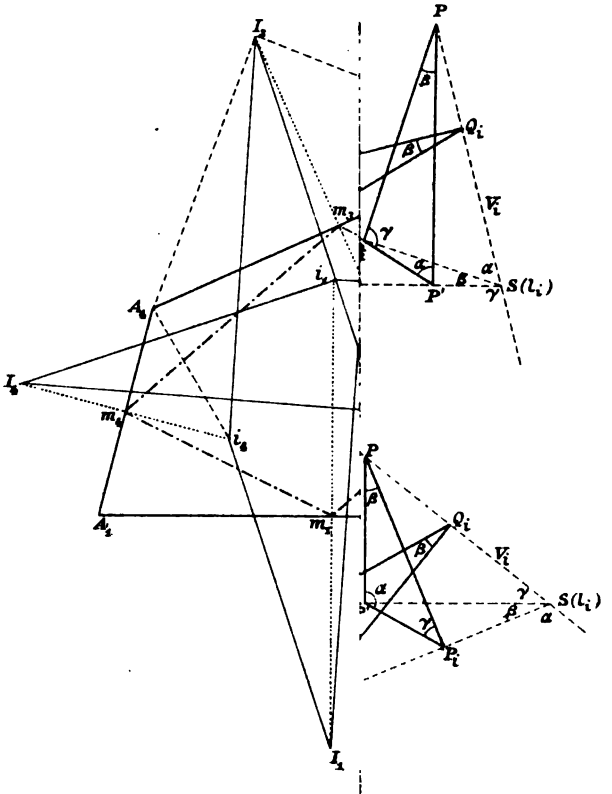
Aller (C. van) 107, 114, 115, 161, 162, 165, 169, 190.
Allersma (T. J.) 1, 3, 15, 17, 22, 25, 27, 33, 34, 35, 36, 38, 55, 56, 57, 58, 61, 64, 66, 72, 78, 93, 97, 99, 116, 117, 122, 123, 136, 138, 139, 143, 154, 167, 168, 183, 184, 188, 191, 199.
Aubel (Dr. H. van) 1, 24, 25, 41, 53, 54, 72, 73, 74, 133, 148, 191.
Bakker (P.) 72, 93, 97, 99.
Barrau (J. A.) 72, 93, 97, 99, 106, 116, 117, 122, 134, 135, 139, 144, 145, 146, 149, 150, 151, 155, 156, 161, 163, 164, 175, 177, 178.
Bes (K.) 2, 22.
Bolt (Dr. J. C.) 55.
Bouwman (Dr. W.) 54, 55, 56, 57, 61, 62, 134, 135, 136, 138, 139, 143, 144, 146, 147, 154, 155, 158, 161, 162, 165, 166, 167, 168, 175, 176, 181, 183, 184, 185, 187, 188, 191, 193, 194, 198.
Cardinaal (J.) 3, 4, 26, 27, 42, 75, 76, 77, 135, 136, 137, 138, 165, 166, 167, 168.
Godefroy (A. N.) 55, 56.
Griend (J. van de) 78.
Haas (Mej. C. H. de) 55, 56, 72, 96, 97.
Jensema (Dr. E.) 116, 117, 122, 125.
Jongh (E. D. J. de) 72, 78, 97, 161, 172, 173, 181, 183, 184, 191.
Julius (Dr. V. A.) 107.
Kapteyn (Dr. W.) 5, 6, 7, 8, 28, 43, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 139, 140, 141, 169, 170, 171.
Kerkhoven (J. A.) 19, 38, 55, 61, 72, 93, 97, 134, 139, 156, 181, 182.
Kerkhoven—Wijthoff (A. G.) 24, 32, 72, 79, 82, 85, 96, 97, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 113, 122, 165, 166, 171, 190, 196.
Kluyver (Dr. J. C.) 9, 10, 11, 29, 30, 44, 86, 87, 88, 172, 173, 174, 192.
Korteweg (Dr. D. J.) 31, 45.
Leupen (F. F.) 97.
Mannoury (G.) 89, 90.
Mantel (W.) 2, 10, 13, 14, 21, 57, 59, 61, 66, 91, 107, 108, 109, 111, 114, 120, 130, 131, 139, 142, 149, 157, 199.
Masier (J. C. de) 56, 135, 139, 149.
Modderman (E. A. J. H.) 114, 115.
Neuberg (J.) 16, 46, 47, 92.
Oss (J. F. van) 22, 81, 82, 89, 97, 136, 144, 146.

—

Oss (S. L. van) 195.
Prange (Dr. A. J. A.) 1, 15, 17, 22, 25, 32, 35, 36, 38, 53, 54, 56, 60, 61, 72, 73, 74, 75, 81, 89, 93, 96, 97, 99, 106, 108, 118, 122, 161, 175, 181, 191, 197.
Schoute (Dr. P. H.) 18, 19, 48, 49, 50, 57, 59, 61, 64, 67, 68, 69, 70, 71, 75, 76, 89, 93, 94, 95, 98, 99, 101, 103, 119, 120, 149, 150, 151.
Schouten (Dr. G.) 179.
Schuh (F.) 114, 115, 152, 153, 161, 162, 163, 165, 166, 167, 168, 171, 175, 179, 180, 181, 185, 186, 187, 188, 190, 196.
Speckman (Dr. H. A. W.) 197.
Stein (Dr. J.) 3, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 21, 22, 30, 44.
Stolp (Dr. C.) 1, 3, 13, 15, 19, 20, 21, 22, 25, 35, 36, 37, 38, 51, 55, 56, 58, 59, 61, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 94, 97, 107, 121, 123, 135, 138, 139, 142, 144, 154, 155, 161, 166, 167, 168, 169, 170, 173, 181, 182, 183, 184, 191, 192, 194, 197, 199.
Thijn (Dr. A. van) 79, 81, 99, 114, 115, 122, 134, 135, 139, 156.
Tiddens (P. G.) 95.
Toxopeus (Dr. A.) 108, 112, 116, 121, 122, 123, 124, 127, 136, 138, 149, 150, 155.
Trotsenburg (B. J. van) 138, 139, 144, 155, 156, 166, 175, 183.
Vaes (F. J.) 135, 142.
Versluys (Dr. W. A.) 158.
Vollgraff (J. A.) 1, 22, 46, 55.
Vries (Dr. H. dc) 55, 56, 61, 62, 98, 99, 183, 184, 185, 186, 194, 195, 198.
Vries (Dr. J. de) 7, 12, 22, 26, 33, 35, 37, 39, 40, 48, 49, 50, 51, 52, 62, 63, 64, 65, 66, 78, 92, 93, 94, 95, 98, 99, 100, 101, 103, 108, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 135, 136, 147, 154, 155, 159, 162, 185, 186, 187, 188, 189, 198, 200.
Wafelbakker (C.) 116, 117.
Wijthoff (Dr. W. A.) 114, 115.
Zeeman (Dr. P.) 23, 39, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 100, 101, 102, 103, 104, 113, 119, 123, 128, 129, 130, 131, 132, 156, 157, 158, 159, 160, 199, 200.

Fig. 11.
(Vr. 182, blz. 361.)





Het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: „*Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*," opgericht in 1779, tracht de beoefening der Wiskunde te bevorderen door

a) het houden van vergaderingen,

b) het uitgeven van tijdschriften,

c) het uitgeven van een reeks vraagstukken ter oplossing voor de leden, later gevolgd door de oplossingen,

d) het uitschrijven van prijsvragen,

e) het inrichten eener boekerij, enz.

De vergaderingen worden zooveel mogelijk maandelijks te Amsterdam gehouden, in de maanden van October tot Maart.

Het tijdschrift „*Revue semestrielle des publications mathématiques*" tracht in den kortst mogelijken tijd beknopte opgaven te verschaffen omtrent de in de verschillende wiskundige tijdschriften opgenomen verhandelingen. Het verschijnt jaarlijks in twee stukken, ieder van ruim honderd bladzijden.

Het tijdschrift getiteld „*Nieuw Archief voor Wiskunde*" geredigeerd door Dr. J. C. Kluyver te Leiden, Dr. D. J. Korteweg te Amsterdam en Dr. P. H. Schoute te Groningen bevat wiskundige verhandelingen. Elke twee jaar verschijnt een deel, bestaande uit vier stukken van ongeveer vijf vel druks.

De voornaamste der door de leden ingezonden oplossingen van de voorgestelde vraagstukken worden gepubliceerd in de „*Wiskundige Opgaven*," geredigeerd door Dr. J. De Vries te Utrecht. Elk deel bevat de oplossingen van 200 vraagstukken in ruim 400 bladzijden; het verschijnt in twee of drie jaar en bij stukken van ongeveer vier vel druks.

Jaarlijks wordt door het Genootschap een twaalftal prijsvragen uitgeschreven. Zij, die na verloop van tijd tien prijsvragen hebben beantwoord, verkrijgen den titel van lid van verdienste.

De bibliotheek, waarvan de boeken op aanvraag bij Dr. C. P. Burger, bibliothecaris van de Universiteits-bibliotheek te Amsterdam, aan de leden worden verzonden, is op de hoogte van den tijd, daar het Genootschap in ruiling is met de voornaamste wiskundige genootschappen in het buitenland.

De *jaarlijksche contributie* van de leden der Vereeniging bedraagt *f* 5,00 (entrée *f* 1,00).

Zij, die nog geen lid zijn en mochten verlangen lid te worden, gelieven zich aan te melden bij den Ondervoorzitter, Dr. D. Coelingh, Van Breestraat 143, Amsterdam.

Shelf-marks.

Titles.

3 2044 102 938 719